Goethe-Universität Frankfurt am Main
Fachbereich 13: Physik
Institut für Didaktik der Physik (IDP)

Wissenschaftliche Hausarbeit

im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien im Fach Physik, eingereicht dem Landesschulamt

– Prüfungsstelle Frankfurt am Main –

Thema:

Kombination von Videoanalyse mit mathematischer Modellbildung

Gutachter:

Prof. Dr. Thomas Wilhelm

Verfasser:

Jannis Valentin Weber

Inhaltsverzeichnis

ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS V

ABBILDUNGSVERZEICHNIS VI

TABELLENVERZEICHNIS VIII

1 EINLEITUNG 1

2 VIDEOANALYSE 4

2.1 DIDAKTISCHE BEGRÜNDUNG DER VIDEOANALYSE 4
2.2 EIGENSCHAFTEN DER VIDEOS 6
2.3 DAS VIDEOANALYSEPROGRAMM *MEASURE DYNAMICS* 8
2.4 DAS VIDEOANALYSEPROGRAMM *TRACKER* 11
2.5 DAS VIDEOANALYSEPROGRAMM *COACH 6* 13

3 MATHEMATISCHE MODELLBILDUNG 15

3.1 DIDAKTISCHE BEGRÜNDUNG DER MATHEMATISCHEN MODELLBILDUNG 15
3.2 DAS MODELLBILDUNGSPROGRAMM *NEWTON-II* 19
3.3 DAS MODELLBILDUNGSPROGRAMM *TRACKER* 21
3.4 DAS MODELLBILDUNGSPROGRAMM *COACH 6* 22

4 KOMBINATION VON VIDEOANALYSE MIT MATHEMATISCHER MODELLBILDUNG 24

4.1 EINDIMENSIONAL BESCHLEUNIGTE BEWEGUNGEN 25
4.1.1 SCHWERE KUGEL 25
4.1.2 PAPIERHÜTCHEN 29
4.1.3 AUTO MIT GLEICHBLEIBENDER ZUGMASSE 33
4.1.4 AUTO MIT SICH ÄNDERNDER ZUGMASSE 38
4.1.5 WASSERAUTO 42
4.2 ZWEIDIMENSIONALE BEWEGUNGEN 46
4.2.1 KATAPULT 47
4.2.2 DA CAU 50
4.3 SCHWINGUNGEN 52
4.3.1 FEDERPENDEL 53
4.3.2 U-ROHR 55
4.3.3 FADENPENDEL 57
4.4 STOßPROZESSE 61
4.4.1 FREIER FALL MIT STOß 61
4.4.2 WURFPARABEL MIT STOß 63

5 VERGLEICH DER GENUTZTEN PROGRAMME 67

5.1 BEDIENUNG 68
5.1.1 *MEASURE DYNAMICS* UND *NEWTON-II* 68
5.1.2 TRACKER 69

5.1.3 COACH 6 70
5.2 GENAUIGKEIT **71**
5.2.1 *MEASURE DYNAMICS* UND *NEWTON-II* 71
5.2.2 TRACKER 72
5.2.3 COACH 6 73
5.3 SCHNELLIGKEIT **73**
5.3.1 MEASURE DYNAMICS UND *NEWTON-II* 73
5.3.2 TRACKER 74
5.3.3 COACH 6 74
5.4 DARSTELLUNGSMÖGLICHKEITEN DES ENDRESULTATS **74**
5.4.1 MEASURE DYNAMICS UND *NEWTON-II* 75
5.4.2 TRACKER 77
5.4.3 COACH 6 78
5.5 EINSTELLUNGSMÖGLICHKEITEN BEI VIDEOANALYSE UND MODELLIERUNG **79**
5.5.1 *MEASURE DYNAMICS* UND *NEWTON-II* 79
5.5.2 TRACKER 79
5.5.3 COACH 6 80
5.6 PREIS UND VERFÜGBARKEIT **81**
5.6.1 *MEASURE DYNAMICS* UND *NEWTON-II* 82
5.6.2 TRACKER 82
5.6.3 COACH 6 82
5.7 TABELLARISCHE ÜBERSICHT **82**
5.8 ZUSAMMENFASSUNG **83**

6 FAZIT **85**

QUELLENVERZEICHNIS **89**

ANHANG **IX**

Abkürzungsverzeichnis

C6	Coach 6
fps	frames per second (Bilder pro Sekunde)
mD	measure Dynamics
N-II	Newton-II
RK4	Runge-Kutta-4

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Perspektivische Verzerrung (Eigene Darstellung mit GeoGebra) 7

Abbildung 2: Gelungene Analyse in mD (Eigene Darstellung) 9

Abbildung 3: Benutzeroberfläche Tracker (Eigene Darstellung) 11

Abbildung 4: Automatische Analyse in Tracker (Eigene Darstellung) 12

Abbildung 5: Benutzeroberfläche C6 (Eigene Darstellung)..... 14

Abbildung 6: Gelungene Analyse in C6 (Eigene Darstellung) 15

Abbildung 7: Benutzeroberfläche von N-II (Eigene Darstellung)..... 19

Abbildung 8: Benutzeroberfläche C6 (Eigene Darstellung)..... 23

Abbildung 9: Modellierung des freien Falls in C6 (Eigene Darstellung) 23

Abbildung 10: Versuchsaufbau freier Fall (Eigene Darstellung)..... 26

Abbildung 11: Modellierung freier Fall (Eigene Darstellung)..... 28

Abbildung 12: Versuchsaufbau fallender Kegel (Eigene Darstellung)..... 29

Abbildung 13: Modellierung ohne Luftreibung beim Fallkegel (Eigene Darstellung) 30

Abbildung 14: Modellierung mit Luftreibung beim Fallkegel (Eigene Darstellung) 31

Abbildung 15: Modellierung mit Luftreibung beim mit einem Gramm beschwerten Fallkegel (Eigene Darstellung)..... 32

Abbildung 16: Modellierung mit Luftreibung beim mit zwei Gramm beschwerten Fallkegel (Eigene Darstellung)..... 32

Abbildung 17: Versuchsaufbau fahrendes Auto (Eigene Darstellung) 34

Abbildung 18: Modellierung Auto 1 (Eigene Darstellung)..... 36

Abbildung 19: Modellierung Auto 2 (Eigene Darstellung)..... 37

Abbildung 20: Modellierung Auto 3 (Eigene Darstellung)..... 37

Abbildung 21: Modellierung fallende Kette (Eigene Darstellung)..... 39

Abbildung 22: Modellierung rutschende Kette ohne Korrektur (Eigene Darstellung) 40

Abbildung 23: Modellierung rutschende Kette mit Korrektur (Eigene Darstellung) 41

Abbildung 24: Versuchsaufbau Wasserauto (Eigene Darstellung) 42

Abbildung 25: Vergleich modellierter mit realer Wasserhöhe (Eigene Darstellung) 44

Abbildung 26: Modellierung Wasserauto (Eigene Darstellung) 45

Abbildung 27: Versuchsaufbau Katapult (Eigene Darstellung) 47

Abbildung 28: Modellierung Katapult ohne Luftreibung (Eigene Darstellung) 48

Abbildung 29: Modellierung Katapult mit Luftreibung 49

Abbildung 30: Da Cau Ball (Eigene Darstellung) 50

Abbildung 31: Versuchsaufbau Da Cau (Eigene Darstellung) 50

Abbildung 32: Modellierung Da Cau ohne Luftreibung 51

Abbildung 33: Modellierung Da Cau mit Lufteibung 52

Abbildung 34: Versuchsaufbau Federpendel (Eigene Darstellung) 53

Abbildung 35: Modellierung Federpendel (Eigene Darstellung) 54

Abbildung 36: Versuchsaufbau U-Rohr (Eigene Darstellung) 55

Abbildung 37: Modellierung U-Rohr (Eigene Darstellung) 57

Abbildung 38: Verbesserter Versuchsaufbau Fadenpendel (Eigene Darstellung) 58

Abbildung 39: Modellierung Fadenpendel (Eigene Darstellung) 59

Abbildung 40: Modellierung mit Polarkoordinaten mit Tracker (Eigene Darstellung) 60

Abbildung 41: Modellierung freier Fall mit Stoß (Eigene Darstellung) 62

Abbildung 42: Modellierung y-t und vy-t-Diagramm Volleyball (Eigene Darstellung) 64

Abbildung 43: Modellierung y-t und vy-t-Diagramm Volleyball (Eigene Darstellung) 65

Abbildung 44: Modellierung x-y-Diagramm Volleyball (Eigene Darstellung) 66

Abbildung 45: Vergleich von Modellierung mit Video in mD (Eigene Darstellung) 76

Abbildung 46: Vergleich von Modellierung mit Video in Tracker (Eigene Darstellung) 77

Abbildung 47: Vergleich von Modellierung mit Video in C6 (Eigene Darstellung) 78

Abbildung 48: Ereignis in Coach 6 (Eigene Darstellung)..... 81

Abbildung 49: Wirkung des Ereignisses in Coach 6 (Eigene Darstellung) 81

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Vergleich der Programme..... 83

1 Einleitung

Die nachfolgende Arbeit befasst sich mit der Kombination von Videoanalyse und mathematischer Modellbildung im Unterricht und soll beleuchten, welche Vorteile es mit sich bringt, diese beiden Methoden miteinander zu verbinden. Reale Bewegungen werden in der Schule nahezu ausschließlich vereinfacht dargestellt und behandelt. Reibung ist dabei zumeist unerwünscht, da diese oft von der Geschwindigkeit einer Bewegung abhängt und die Differentialgleichung der Bewegungsgleichung damit analytisch unlösbar macht. Die so vorgenommene Simplifizierung hat zwar den Vorteil, dass Schülerinnen und Schüler zumindest in einem gewissen Rahmen das Gefühl haben, die Lösung der Gleichungen nachvollziehen oder selbst vollführen zu können. Andererseits besteht natürlich der große Nachteil darin, dass Reibung in jeder Bewegung auftritt und diese entsprechend beeinflusst, womit die im Physikunterricht behandelten Bewegungen meist unrealistisch und wenig authentisch sind. Durch die Idealisierung kann von Schülerseite nicht eingeschätzt werden, wie groß die Beeinflussung durch Reibung ist und wie genau eine idealisiert berechnete Bahn, beispielsweise beim freien Fall oder schiefen Wurf oder auch bei Schwingungsprozessen, mit der Realität übereinstimmt. Aber um ein gutes physikalisches Verständnis zu erreichen, „muss auch ausführlich diskutiert werden, wie die physikalischen Abläufe ohne die Idealisierungen ablaufen“ (WILHELM 2005, S. 60).

Mathematische Modellbildung kann eine Möglichkeit dazu sein und ist eine Methode zur theoretischen Beschreibung von Bewegungen. Verschiedene Software liefert hier unterschiedliche Ansätze, wie diese Modellbildung ausgestaltet wird. Generell jedoch eignet sich die Modellbildung hervorragend für den physikalischen Erkenntnisgewinnungsprozess in der Schule, da hier Schritt für Schritt erarbeitet und nachvollzogen werden kann, welche Einflussfaktoren auf eine Bewegung einwirken und wie dies schließlich die Trajektorie eines gegebenen Objekts beeinflusst bzw. bestimmt.

Dadurch kann ein Gefühl dafür entwickelt werden, wie sehr abstrahiert werden darf, welche Einflussgrößen sicht- und spürbar die Bewegung beeinflussen und wie exakt ein Modell ist, welches als mögliche Vereinfachung verwendet wird.

Die dafür geeigneten Programme lösen dazu auch kompliziertere Differentialgleichungen – mit verschiedenen numerischen Verfahren – und ermöglichen damit auch eine Behandlung von realistischen und somit komplizierten Problemen. Dies ermöglicht einen attraktiven Physikunterricht, da

„für den Unterricht [...] insbesondere [sic] Phänomene aus dem Bereich der Lebenswelt der Schüler von Bedeutung“ (BETHGE und SCHECKER 1990, S. 48) sind. Sonst kann schnell der Eindruck entstehen, dass Physik nur in der Schule betrieben wird und mit dem Alltag wenig Verbindung hat.

Dabei muss allerdings auch darauf geachtet werden, dass die Distanz von Lernendem zu dem von einer Maschine berechneten Resultat kein für den Lernprozess hinderlicher Faktor wird. Ein Nutzer von Modellbildungssoftware muss darauf vertrauen, dass ein Resultat einer Berechnung auch gut ist, wenn es numerisch am Computer gelöst wird. Dies ist ein weiterer wichtiger Aspekt, für den zumindest im Hinblick auf ein naturwissenschaftliches Studium sensibilisiert werden muss, da nahezu keine der in der Naturwissenschaft genutzten Gleichungen analytisch gelöst werden können (vgl. SULEDER et al. 2004).

Die Möglichkeiten, aber auch Schwierigkeiten, der mathematischen Modellbildung sollen in dieser Arbeit näher beleuchtet werden. Dabei soll untersucht werden, welche Bewegungen realistisch modellierbar und welche zu komplex sind.

Ohne den Vergleich mit der Realität werden die oben gestellten Forderungen allerdings nur bedingt erfüllt, denn nur das Anpassen der verschiedenen Einflussgrößen einer Bewegung, bis die Modellierung zufriedenstellend genau einem realen Ablauf entspricht, liefert Erkenntnisse darüber, wie realistisch die verwendeten Modelle sind.

„Für eine Vorhersage bzw. Berechnung der Bewegung und damit ein tieferes Durchdenken und Strukturieren der Abläufe ist eine Modellbildung sinnvoll, bei der Videos den wünschenswerten Realitätsbezug herstellen und auch zu quantitativen Vergleichsaussagen herausfordern“ (WILHELM et al. 2003, S. 12).

Die Videoanalyse bietet die Möglichkeit zu einem solchen Vergleich und ist ein Messverfahren, welches keinerlei zusätzliche Sensoren benötigt und sich damit vor allem durch seine Einfachheit auszeichnet, da nur ein videofähiges Gerät und die entsprechende Software auf einem Rechner benötigt werden. Grundsätzlich ist diese Messmethode weitestgehend auf die Mechanik limitiert und unterliegt weiteren Beschränkungen, die in dieser Arbeit untersucht werden sollen.

Die Vorteile der Kombination dieser beiden Vorgehensweisen machen es umso erstaunlicher, dass es keine aktuellen Arbeiten zu dem Thema gibt. Studien, die bisher dazu gemacht wurden, basierten auf Software, die mit aktuellen Betriebssystemen nicht mehr kompatibel ist.

Um die Kombination von Videoanalyse und mathematischer Modellbildung zu untersuchen, werden verschiedene Programme sowohl für die Videoanalyse, als auch für die mathematische Modellbildung genutzt und verglichen. Dabei wird mit *Tracker* (Version 4.96, Februar 2017) ein Programm genutzt, welches die Videoanalyse mit der Modellbildung vereint, und mit *measure Dynamics* (Version 1.5 full) und *Newton-II* (Version 3.0.4, November 2016) die Kombination von zwei Programmen erprobt, die jeweils eine der beiden Aufgaben erledigen. Dazu kommt das Programm *Coach 6 Studio MV* (Version V5.25), in welchem die Modellierung graphisch implementiert wird. Anhand dieses kriteriengeleiteten Vergleichs sollen Empfehlungen für die Schule bzw. für Physiklehrkräfte ausgesprochen werden, welches Programm wie eingesetzt werden kann und sollte. Dabei wird darauf geachtet, dass die technischen Hindernisse nicht den didaktischen Nutzen des Einsatzes der Programme übertreffen und damit eine Legitimierung für den Einsatz im Unterricht zunichtemachen.

Insgesamt kann die Arbeit durch die geleistete Entwicklungsforschung auch als Vorschlagskatalog aufgefasst werden, der Ideen und Beispiele liefert, wie Videoanalyse in der Schule mit Modellbildung kombiniert werden kann und welche Vorteile diese Kombination für die Erkenntnisgewinnung der Schülerinnen und Schüler mit sich bringt. Die ausgewählten Bewegungen sind so gewählt, dass verschiedene Grundphänomene der Mechanik abgedeckt und besprochen werden. Damit soll angeregt werden, den Einsatz dieser Software häufiger in Erwägung zu ziehen, ohne jedoch konkrete Unterrichtsentwürfe zu liefern. Dies muss im Einzelfall dann an die Vorerfahrungen und den Leistungsstand der entsprechenden Lerngruppe angepasst werden.

Auch soll dargestellt werden, an welchen Stellen mit Schwierigkeiten zu rechnen ist, was bei den Videos beachtet werden sollte und welche Modellierungen auch von Schülerseite durchgeführt werden können. Dazu werden ebenfalls die Videos für Lehrkräfte bereitgestellt. Ebenso können diese aber auch lediglich als Vorlage dienen, um mit einer Lerngruppe eigene Experimente und Videos zu entwickeln, was die Akzeptanz der Schülerinnen und Schüler für die Ergebnisse erhöhen kann.

2 Videoanalyse

2.1 Didaktische Begründung der Videoanalyse

Videoanalyse ist ein Messverfahren, welches bereits vor dem Einsatz von Computern im Physikunterricht eingesetzt wurde. Es eignet sich fast ausschließlich für den Bereich der Mechanik, hat hier aber einige Vorteile gegenüber anderen Messmethoden. So ist es sehr einfach und kostengünstig. Generell ließe sich ein Video auch durch Ausmessen von Längen auf einem Monitor analysieren, was aber sehr zeitintensiv ist, weshalb in der hier verwendeten Form lediglich eine Kamera und ein PC mit Videoanalyseprogramm benötigt wird, deren Kosten im Gegensatz zu manch anderer Ausstattung der Physiksammlung eher als gering einzustufen sind, insbesondere, wenn man die vielseitigen Einsatzmöglichkeiten betrachtet.
Außerdem ist es bei vielen Bewegungen einfacher, ein Video aufzunehmen, als sich einen Aufbau zu überlegen, bei dem die gesuchten Größen über Sensoren erfasst werden können. Auch beeinflussen Sensoren zum Teil die Bewegung als solche, was bei der Aufnahme eines Videos nicht der Fall ist. So können mithilfe von Videoanalyse eine Vielzahl von zum Teil auch sehr komplexen Bewegungen erfasst und gemessen werden (vgl. SULEDER 2010).
Heute verfügbare Software macht das Analysieren von zuvor gefilmten Bewegungen deutlich einfacher. Das Video beinhaltet in jedem der gemachten Bilder den Ort eines sich bewegenden Objekts. Dadurch, dass die Zeitspanne zwischen zwei Bildern in einem Video bekannt ist, kann mithilfe dieser Zeitdifferenz und der zu messenden Ortsdifferenz die Geschwindigkeit $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ bestimmt werden. Mithilfe der Geschwindigkeiten kann man eine Geschwindigkeitsdifferenz bestimmen, welche wiederum mit Kenntnis der Zeitdifferenz die Beschleunigung $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ liefert. Unabdingbar ist ein Umrechnungsfaktor, der die gemessene Länge in real zurückgelegten Weg umrechnet. Dazu muss ein Maßstab im Video enthalten sein oder Kenntnis über die genaue Größe eines sich im Video befindenden Objekts bestehen. Offensichtlich ist die manuelle Messung und Rechnung sehr umständlich, wodurch es sich anbietet, die Videoanalyse einen PC durchführen zu lassen. Auch hier gibt es aber die Möglichkeit der manuellen Messung durch Klicken auf das Objekt und die der automatischen Analyse.

Die automatische Analyse liefert direkt die Ortskoordinaten, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Objekts und bietet darüber hinaus weitere Möglichkeiten.

So ist Videoanalyse bestens dazu geeignet, bei der Einführung von Kraft, Geschwindigkeit und Beschleunigung zu unterstützen und den Vektorcharakter dieser Größen zu betonen. Nach WILHELM (2005) ist es beispielsweise sinnvoller in der Schule mit zweidimensionalen Bewegungen zu beginnen und die eindimensionalen als Spezialfall zu behandeln, da Schülerinnen und Schüler sonst große Schwierigkeiten mit der Richtung von physikalischen Größen haben. Geschwindigkeit wird lediglich als Schnelligkeit, also als skalare Größe, wahrgenommen, und somit „liegt für Schüler bei der gleichförmigen Kreisbewegung eine konstante Geschwindigkeit und folglich keine Beschleunigung vor“ (WILHELM 2005, S. 14). Abhilfe können Videoanalyseprogramme mit den entsprechenden ikonischen Repräsentationen schaffen, die in der angesprochenen Kreisbewegung eine nach innen gerichtete Beschleunigung zeigen können.

Insgesamt ist es mit Videoanalyse möglich, eine Bewegung vollständig zu analysieren, wobei durch die automatische Analyse der Messdaten und Berechnung der gesuchten Größen durch die Programme „der Messprozess und das Verstehen der zugrundeliegenden physikalischen Zusammenhänge [...] in den Vordergrund“ (SULEDER 2010, S. 33) rückt, wodurch unter anderem Einblicke in wissenschaftliche Arbeitsweisen vermittelt werden können.

Bezogen auf die Arbeit ist es aber vor allem wichtig, dass Videoanalyseprogramme auf eine einfach Art Messdaten liefern, die zur Modellierung der gefilmten Bewegung dienen können, und das erstellte Modell wiederum mit dem gefilmten Experiment verglichen werden kann. Demensprechend wird dieser Aspekt der Videoanalyseprogramme hier besonders fokussiert. So können Video und Modell übereinandergelegt, wobei auch hier beispielsweise die Vektorpfeile der verschiedenen Komponenten eingeblendet werden können, oder deren Graphen in einem Diagramm dargestellt werden.

Diagramme im Allgemeinen fördern in besonderem Maße das funktionale Denken, und deren Interpretation gelingt optimal durch die direkte und zeitliche Kopplung mit einem Realexperiment, welches in Form eines Videos vorliegt (vgl. SULEDER 2010).

Aber auch der Videoanalyse sind einige Grenzen gesetzt, die vor allem in der Aufnahme der Videos liegen. Da dies ein enorm wichtiger Aspekt der Videoanalyse ist, soll dieser im folgenden Kapitel gesondert betrachtet werden.

2.2 Eigenschaften der Videos

Beim Filmen der Videos ist auf einiges zu achten. Zunächst sollte optimalerweise eine Kamera vorhanden sein, welche ausreichend Bilder pro Sekunde aufnehmen kann, was vor allem bei schnellen Bewegungen wichtig ist. Die in dieser Arbeit benutzten Videos wurden alle mit Bildraten von 120 oder 240 frames per second (fps) gedreht. Zudem sollte ein Stativ verwendet werden, wodurch man die Perspektive in Ruhe einstellen kann, bevor das Video gefilmt wird. Allerdings sind je nach Verwendungszweck auch bereits mit dem Smartphone zufriedenstellende Resultate möglich, falls die Aufnahme des Videos von Schülerseite erfolgen soll.
In jedem Fall sollte die Kamera exakt horizontal oder auch vertikal ausgerichtet werden, was bei den gedrehten Videos mit Wasserwaage überprüft wurde. Auch muss die Bewegungsrichtung immer orthogonal zum Vektor der Kameraperspektive stehen, da beispielsweise schräg nach hinten gerichtete Bewegungen nicht richtig erkennbar sind (vgl. SULEDER 2010).
Der Hintergrund sollte einfarbig sein, und das sich bewegende Objekt sollte sich von diesem deutlich abheben. Im konkreten Fall wurde meist ein gekachelter Hintergrund verwendet, der bzgl. des Kontrasts zwar nicht so optimal ist wie ein schlicht schwarzer Hintergrund, dafür aber den Vorteil hat, dass man direkt erkennt, ob die Kamera genau parallel zum Hintergrund aufgestellt wurde, wodurch Verzerrungen vermieden und möglicherweise noch korrigiert werden können. Dies macht man, in dem man die Kamera zunächst waagerecht ausrichtet und sich dann an den Fugen in der Wand orientiert. So schließt man eine leicht schräge Richtung der Kamera aus, welche mit dem bloßen Auge sonst schwer zu erkennen wäre. Dementsprechend kann die Bewegungsrichtung des Objekts dann ebenfalls an der Wand ausgerichtet werden und läuft in einem optimalen Winkel von 90° zur Filmrichtung ab.
Etwas schwieriger ist es, die richtige Distanz der Kamera zum bewegten Objekt zu finden. Ist diese zu weit entfernt, wird es für das Programm immer schwieriger, das Objekt zu finden – insbesondere bei kleinen Objekten, die sich schnell bewegen – und die Messungen werden zum Teil ungenauer, wenn sich

das Objekt möglicherweise nur noch einige wenige Pixel pro Zeitschritt fortbewegt. Je näher die Kamera am Objekt positioniert wird, desto stärker werden jedoch Effekte der perspektivischen Verzerrung, die, wie in Abbildung 1 verdeutlicht, auf keinen Fall unterschätzt werden dürfen.

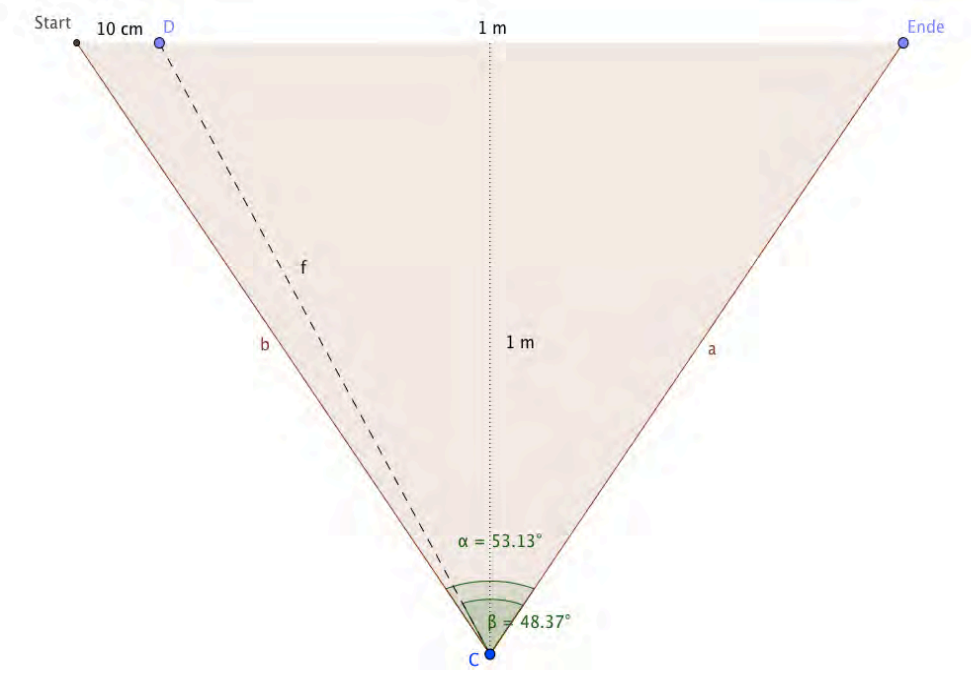


Abbildung 1: Perspektivische Verzerrung (Eigene Darstellung mit GeoGebra)

Befindet sich beispielsweise die Kamera in Punkt C, welcher einen Meter von der Strecke zwischen Start und Ende entfernt ist, welche das Objekt zurücklegt, ist der Kameraöffnungswinkel zwischen Start und Ende der Bewegung zunächst $53{,}13°$. Wenn der Maßstab vom Start zum Ende auf einen Meter festgelegt wurde, assoziiert das Programm einen Winkel von $53{,}13°$ mit der Strecke von einem Meter und ordnet den einzelnen Pixeln dann eine feste Größe zu. Dass der Öffnungswinkel aber nicht proportional zur tatsächlich zurückgelegten Strecke ist, sieht man im folgenden Beispiel. Bewegt sich das Objekt 10 cm fort, beträgt der Öffnungswinkel noch $48{,}37°$. Damit hat sich das Objekt um einen Winkel von $53{,}13° - 48{,}37° = 4{,}76°$ bewegt. Das Programm geht also von einer Längenänderung von $\Delta x = \frac{1\,m}{53{,}13°} \cdot 4{,}76° = 0{,}09m$ aus, was einem relativen Fehler von 10 % entspricht. Die Verhältnisse der Distanzen sind hier extrem gewählt, wodurch es in Realität zu kleineren Fehlern kommt, zumal das Ganze auf Pixelebene betrachtet werden müsste. Unterschätzt werden darf dieser Effekt dennoch nicht.

Je kleiner der Abstand ist, desto größer der Fehler. Optimal ist es also, mit einer ausreichend guten Kamera einen gewissen Abstand einzuhalten und mit optischem Zoom das Sichtfeld zu begrenzen. Dementsprechend sollte bei der

Objektivwahl eher ein Tele-, als ein Weitwinkelobjektiv genommen werden. Dies minimiert den angesprochenen Effekt.
Neben der Positionierung und den Bildern pro Sekunde, kann auch die Belichtungsdauer variiert werden. Hilfreich ist dabei zumeist ein Sportmodus, der in der Regel eine kurze Belichtungszeit garantiert. Dies ist bei schnellen Bewegungen wichtig, da das Objekt sonst verschwimmt und vom Programm nicht mehr ausreichend genau verfolgt werden kann. Alternativ kann natürlich auch eine manuelle Einstellung der Belichtungszeit vorgenommen werden. Diese Faktoren variieren je nach Modell der Kamera und können zum Teil auch gar nicht eingestellt werden. Für viele Anwendungen sind die Standardeinstellungen ausreichend.

2.3 Das Videoanalyseprogramm *measure Dynamics*

Eins der drei Programme, welche in dieser Arbeit für die Videoanalyse verwendet wurden, ist das Programm *measure Dynamics* von Phywe. Es ist nur für Windows Betriebssysteme erhältlich und bedarf einer Nutzungslizenz, die Universitäten und Schulen erwerben können. Im Folgenden sollen lediglich die für die vorliegende Arbeit relevanten Funktionen und Abläufe beschrieben werden, da es zu dem Programm bereits umfassendere Anleitungen und Beschreibungen gibt, um anhand dessen die Eignung für die Kombination mit mathematischer Modellbildung herauszustellen.
Das Programm ist ausschließlich für die Videoanalyse vorgesehen und bietet daher eine übersichtliche Benutzeroberfläche. Die zu untersuchenden Videos können in nahezu allen gängigen Dateiformaten vorhanden sein, da *measure Dynamics* diese zu Beginn der Analyse konvertiert.
Nach der Konvertierung sind vor der Analyse zunächst der Maßstab, ein Koordinatensystem und die Bilder pro Sekunde festzulegen. Letzteres musste bei den hier verwendeten Videos manuell erfolgen, da diese Information nicht mit im Video gespeichert war. Im Optimalfall erkennt das Programm aber automatisch mit wie vielen Bildern pro Sekunde das Video gedreht wurde, sofern diese Information in der Videodatei enthalten ist. Als nächstes kann die automatische Analyse erfolgen, welche bei längeren Videos mit vielen fps eine erhebliche Erleichterung im Vergleich zu der manuellen Analyse darstellt.
Für die automatische Analyse kann zunächst der Bereich eingegrenzt werden, in dem das Objekt während des Videos zu finden sein wird, was dem Programm

die Suche erleichtert. Daraufhin wird das Objekt ausgewählt, und die automatische Analyse kann gestartet werden. *Measure Dynamics* bietet verschiedene Methoden, wie das Objekt verfolgt werden kann, welche zum Teil auch miteinander kombiniert werden können. Diese sind aber oft bereits optimal voreingestellt, sodass an dieser Stelle nicht immer etwas verändert werden muss. Wenn die automatische Analyse dennoch wenig zufriedenstellend funktioniert, kann man diese noch einmal mit einer Auswahl aus Bewegungserkennung, Farberkennung und Mustererkennung laufen lassen und möglicherweise bessere Ergebnisse erhalten. Zudem kann man bei all diesen Erkennungsarten noch Toleranzen einstellen, mit denen das Programm dann arbeitet.

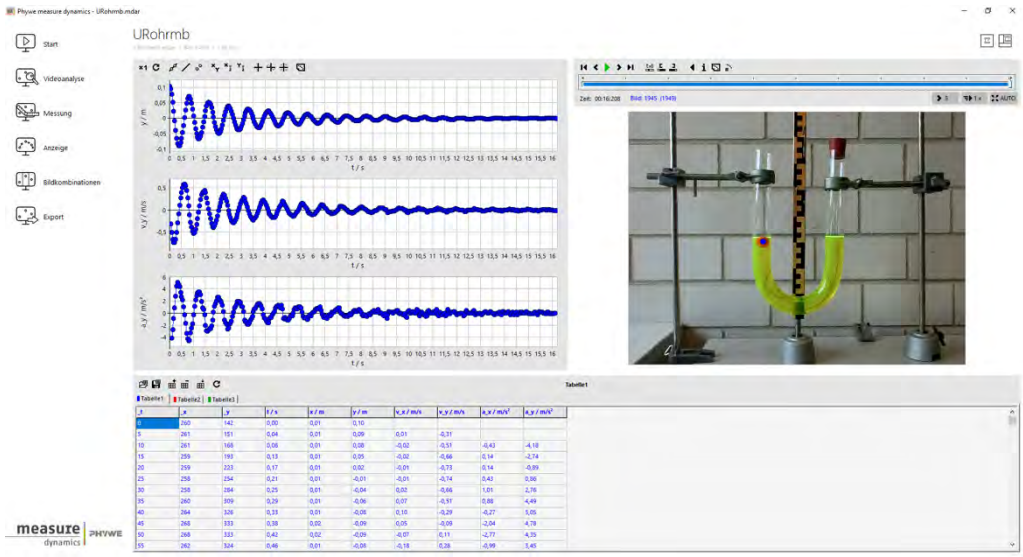


Abbildung 2: Gelungene Analyse in mD (Eigene Darstellung)

Eine gelungene Analyse ist in Abbildung 2 zu sehen.

Falls die Analyse dennoch nicht optimal verläuft, ist das Problem meist bei dem Video zu suchen, bei dem vermutlich nicht alle oben beschriebenen Bedingungen eingehalten wurden. Tritt dieser Fall ein, kann man, falls das Objekt nur in einigen wenigen Frames nicht erkannt werden konnte, die fehlenden oder falschen Messwerte durch manuelle Analyse ergänzen.

Dies macht man über den Reiter *manuelle Analyse*. Dort geht man in der Wertetabelle auf die Zeilen mit den fehlenden Werten und klickt in dem Video-Fenster auf die Position des Objekts, wodurch dies in der Tabelle ergänzt wird. So lässt sich eine nicht ganz optimale automatische Analyse noch retten, wohingegen es sich je nach Situation eher anbietet, ein neues Video zu drehen, bei dem sich das bewegte Objekt deutlicher vom Hintergrund abhebt oder bessere Einstellungen an der Kamera vorgenommen werden.

Die gewonnenen Daten sind dann in einer Tabelle gespeichert, welche im .csv-Format exportiert werden kann, was vor allem für die spätere Modellbildung wichtig ist. Zunächst ist es allerdings sinnvoll, die Werte in den angebotenen Diagrammen zu überprüfen. Dabei kann man leicht zwischen verschiedenen Diagrammen hin und her wechseln und die Güte der erhobenen Daten bewerten.

Bei den durch Bildung des Differenzenquotienten errechneten Geschwindigkeiten und vor allem Beschleunigungen erkennt man häufig eine recht große Abweichung von den zu erwartenden Werten. Dies ist dadurch bedingt, dass die Zeitschritte, welche für die Berechnung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen genutzt werden, sehr klein sind. Bei einer Bildrate von 240 Bildern liegen zwischen zwei Messungen beispielsweise $\frac{1s}{240} = 4{,}2 \cdot 10^{-3}s$. Damit legt das Objekt in dieser Zeit nur eine sehr geringe Distanz zurück, wodurch auch kleine Absolutfehler zu großen Relativfehlern werden. Damit sind „die Beschleunigungswerte [oft] nur qualitativ nutzbar“ (SULEDER 2010, S. 18).

Dieses Problem lässt sich durch die Wahl von größeren Zeitschritten abschwächen. So kann man problemlos über dem Bereich des Fensters, in dem das Video abgespielt wird, einstellen, dass beispielsweise nur jedes fünfte Bild analysiert werden soll. Dies hat den Nachteil, dass weniger Messdaten erhoben werden. Es reduziert den relativen Fehler der Geschwindigkeit und Beschleunigung aber erheblich, da nun über ein Vielfaches der vorigen Zeitspanne gemittelt wird und sich damit die Absolutdifferenzen vervielfachen, und stellt bei Videos mit ausreichend fps auch kein Problem dar. Außerdem kann in derselben Leiste auch ein Start- und Endpunkt der Analyse festgelegt werden, falls nicht das ganze Video analysiert werden soll. Weiterhin kann die Abspielgeschwindigkeit während der Analyse variiert werden, was für den Nutzer bei längeren Videos sehr komfortabel ist.

Die so optimierten Messwerte können nun als Excel-Tabelle exportiert und weiterverwendet werden. Das Programm bietet darüber hinaus noch eine ganze Reihe weiterer Funktionen, wie ikonische Repräsentationen und Stroboskopbilder, die in anderen Bereichen didaktisch wertvoll sind, hier aber nicht weiter benötigt wurden.

2.4 Das Videoanalyseprogramm *Tracker*

Weiterhin soll nun das Programm *Tracker* betrachtet werden. Zunächst ist zu *Tracker* anzumerken, dass es das Programm sowohl für Windows und Mac, als auch für Linux gibt. Zudem ist es ein kostenloses Open Source Physics-Projekt und kann dementsprechend ohne Lizenz auf jedem gängigen Rechner verwendet werden.

Das Programm ist sehr umfangreich, was vor allem auch daran liegt, dass es Videoanalyse und Modellbildung miteinander vereint. Auf den zweiten Punkt wird in Kapitel 3 eingegangen.

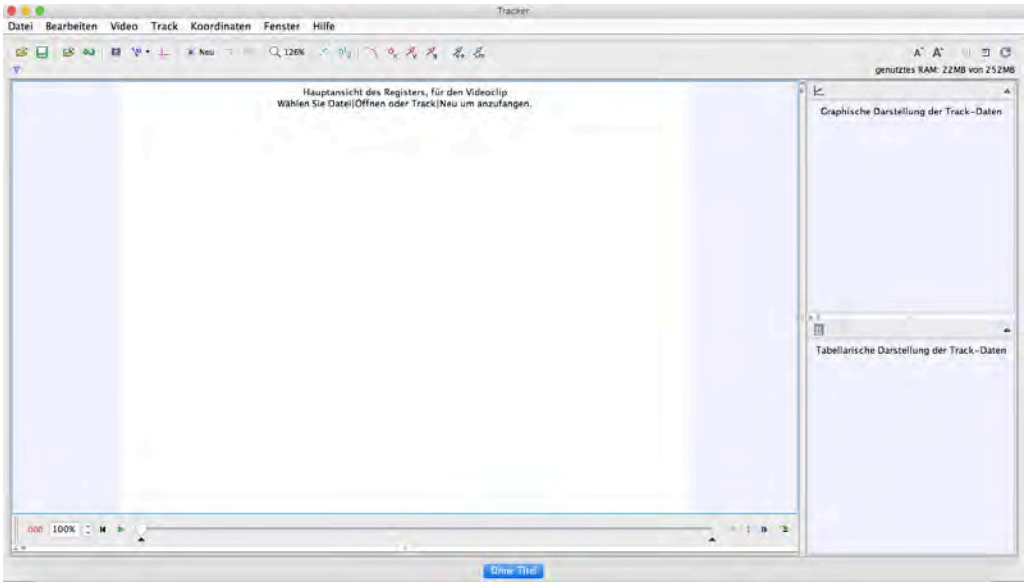


Abbildung 3: Benutzeroberfläche Tracker (Eigene Darstellung)

Beim Öffnen von *Tracker* erscheint zunächst eine etwas unübersichtliche Benutzeroberfläche (Abb. 3). Um eine Videoanalyse durchzuführen, muss zunächst ebenfalls ein Video importiert werden, wobei auch hier das Dateiformat unproblematisch ist. Wenn das Video importiert ist, sieht man dieses im Hauptfenster des Programms. Rechts daneben sind Felder für die Diagramme und Tabellen reserviert, welche aber bislang leer sind.

Genauso wie bei *measure Dynamics* und allen anderen Videoanalyseprogrammen muss zunächst ein Maßstab festgelegt und ein Koordinatensystem positioniert werden. Dies geschieht über Buttons in der oberen Leiste. Daneben findet sich auch ein weiterer Button mit dem Namen *Clip Einstellungen*, mit dem Startbild, Schrittweite, Endbild und Bildrate eingestellt werden können. Wie oben beschrieben, führt eine größere Schrittweite auch hier zu glatteren Kurven der Geschwindigkeit und Beschleunigung.

Sind diese Einstellungen getätigt, kann ein neues Objekt erstellt werden, welches analysiert werden soll, was über *Neu* und *Punktmasse* funktioniert. Auf *Autotrack* lassen sich dann die Einstellungen für die automatische Analyse tätigen. Dazu muss zunächst durch Klick auf das Objekt eine Schablone festgelegt werden. Diese Schablone wird in jedem Bild zugrunde gelegt und der Ausschnitt nach einer Region abgesucht, welche dieser Schablone ähnelt. In dem Autotracker-Fenster gibt es noch weitere Einstellungsmöglichkeiten (Abb. 4).



Abbildung 4: Automatische Analyse in Tracker (Eigene Darstellung)

Hier können die Evolutionsrate und das Akzeptanzniveau der Schablone festgelegt werden (Abb. 4). Die Evolutionsrate in Prozent bestimmt, inwieweit sich die Schablone an die Veränderung der Übereinstimmung im Video anpasst. Stellt man diese auf 0 %, bleibt die Schablone die ganze Bewegung über identisch. Wählt man eine höhere Evolutionsrate, passt sich die Schablone beispielsweise geänderten Lichtverhältnissen an, wenn das Programm merkt, dass die Übereinstimmung im Video heller oder dunkler wird.

Das Akzeptanzniveau legt fest, wie genau die Übereinstimmung sein muss, um vom Programm akzeptiert zu werden. Falls diese Übereinstimmung unterschritten wird, wird dieser Punkt nicht übergangen. Der Benutzer wird stattdessen gefragt, ob er die Übereinstimmung akzeptieren, das Suchfenster verschieben, das Objekt manuell markieren, das Akzeptanzniveau verringern, eine neue Schablone festlegen oder den Punkt auslassen möchte.
Oft ist es besonders hilfreich, ein neues „key frame“ festzulegen, wodurch eine neue Schablone definiert wird. Das kann besonders bei einer einmaligen Änderung des Objekts, in Form von Drehung oder Helligkeitsänderung, helfen, da die restlichen Bilder auf Basis dieser neuen Schablone untersucht werden und so auch der Rest der Analyse gute Ergebnisse erzielen kann.
Dennoch kann es natürlich auch hier passieren, dass das Programm eine hohe Übereinstimmungsgüte findet, die Übereinstimmung aber nicht dem eigentlichen Objekt entspricht. In solchen Fällen muss die Analyse ebenfalls manuell ergänzt oder das Video unter besseren Bedingungen erneut gedreht werden.
Die Vielfalt an Einstellungsmöglichkeiten kann die Güte der automatischen Analyse erhöhen, führt aber auch zu einer deutlich erhöhten Dauer der Analyse.
Wenn die Analyse erfolgreich war, werden ebenfalls eine Tabelle mit den Daten und Diagramme zur Verfügung gestellt, mit denen man die Plausibilität der Analyse überprüfen kann.
Bei *Tracker* werden die Videos selbst nicht in der Datei gespeichert, welche durch die Analyse erstellt wird. Es wird stattdessen extern auf die Videos zugegriffen, was die Dateigröße verringert, aber den Nachteil hat, dass die Videos nicht verschoben werden dürfen und immer auf dem Rechner verfügbar sein müssen, auf dem das Programm genutzt werden soll.

2.5 Das Videoanalyseprogramm *Coach 6*

Weiterhin wird das Videoanalyseprogramm *Coach 6* besprochen, welches in Deutschland von Klett vertrieben wird und in den Oberstufen-Schulbüchern für Physik bereits im Lieferumfang enthalten ist. Es ist für Windows- und Mac-Betriebssysteme vorgesehen. Mitgeliefert werden hier einige Beispiele, an denen man das Programm ausprobieren und erproben kann. Allerdings ist es aufgrund dessen umständlich, ein leeres Projekt zu öffnen, da dieses nicht automatisch erscheint, sondern man in dem Ordner „Videoanalyse Impulse

Physik“, in dem auch vorgefertigte Beispiele enthalten sind, eine Datei namens „V_13.0_Eigene_Videoanalyse“ öffnen muss. Daraufhin öffnet sich die eigentliche Benutzeroberfläche (Abb. 5).

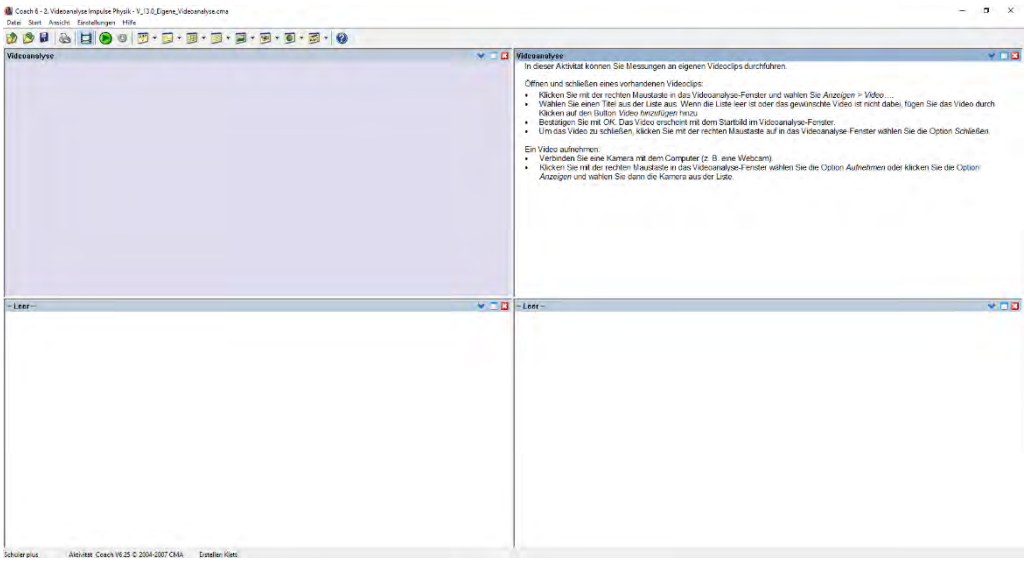


Abbildung 5: Benutzeroberfläche C6 (Eigene Darstellung)

Ein Video kann nun durch Klicken auf das Kamera-Symbol hinzugefügt werden, muss hier aber in den Formaten .avi, .mov oder .mpg codiert sein. Dementsprechend mussten alle genutzten Videos noch konvertiert werden.

Wird nun das Video geöffnet, muss noch ausgewählt werden, in welchem der vier Fenster es angezeigt werden soll. Damit die Videoanalyse funktioniert, muss natürlich noch die Bildrate, ein Maßstab und ein Koordinatensystem festgelegt werden, was über die rechte Maustaste und *Achsen und Skalierung* bzw. *Zeiteinstellungen* erreicht werden kann.

Die automatische Analyse erfolgt nun, indem man über einen Klick auf die rechte Maustaste auf *automatische Punktverfolgung* klickt und das Objekt festlegt, welches verfolgt werden soll. Es werden keine weiteren Einstellungen benötigt, und durch Klick auf den grünen Pfeil beginnt die automatische Analyse. Die gewonnenen Daten können nun in Diagrammen oder Tabellen angezeigt werden, was allerdings nicht automatisch erfolgt. Weiter können Bilder, Texte oder Webseiten eingefügt werden. Ein mögliches Resultat kann wie in Abbildung 6 aussehen.

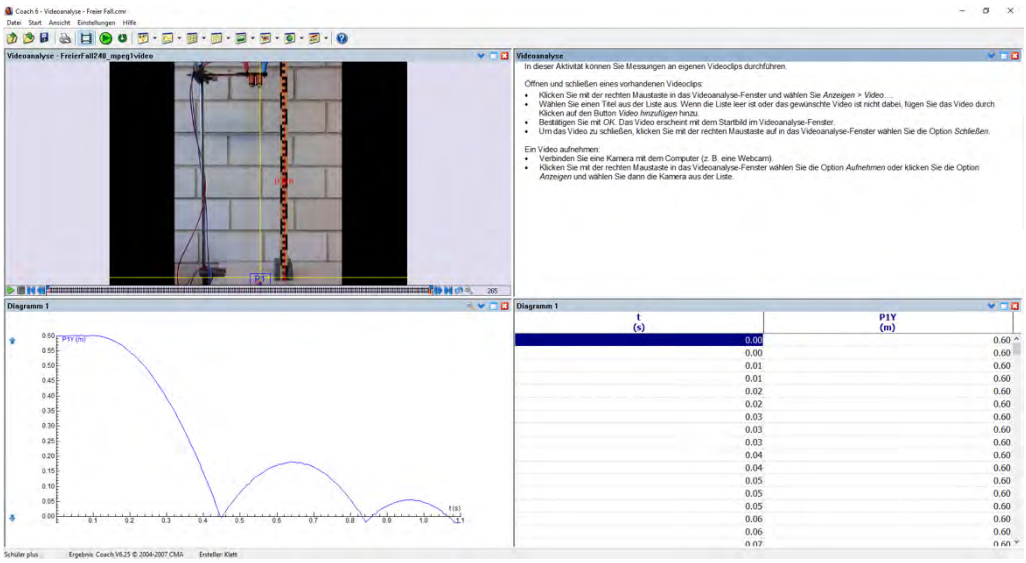


Abbildung 6: Gelungene Analyse in C6 (Eigene Darstellung)

Es lassen sich allerdings keine Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ausgeben, da diese vom Programm nicht errechnet werden.

Die Tabellen können exportiert werden, anders als bei *measure Dynamics* aber im .txt und nicht im .csv-Format.

Obwohl das Programm *Coach 6* auch die Modellbildung beherrscht, ist dazu das Öffnen eines separaten Programmteils nötig, welcher aber ähnlich aufgebaut ist. Inwiefern die von der Videoanalyse erhobenen Daten für die Modellbildung genutzt und mit dieser verglichen werden können, wird im Kapitel 3 beschrieben.

3 Mathematische Modellbildung

3.1 Didaktische Begründung der mathematischen Modellbildung

Das Denken in Modellen ist in der Naturwissenschaft von großer Bedeutung, und auch das hessische Kerncurriculum formuliert das Arbeiten mit Modellen als einen der zu erreichenden Bildungsstandards am Ende der Sekundarstufe I. Demnach sollen Modelle entworfen, angewandt, dynamische Prozesse mit Hilfe dieser analysiert, Anwendbarkeit und Aussagekraft dieser überprüft und zwischen Modell und Realität unterschieden werden können (vgl. Hessisches Kultusministerium 2017a).

Mathematische Modelle haben den Zweck, einen in Realität stattfindenden Prozess durch die Mathematik beschreiben zu können und sind auch im

Kerncurriculum des Landes Hessen für die Sekundarstufe II verankert. Hier sind sie als numerische Simulation für „weitere Bewegungen“ (Hessisches Kulturministerium 2017b, S. 30) geführt, weshalb man über die Bedeutung für und den Einsatz in der Schule von mathematischen Modellen diskutieren sollte. Modellbildungssysteme eignen sich hier in besonderem Maße, um die physikalische Struktur hinter mehr oder weniger komplizierten Bewegungsabläufen zu verdeutlichen, da der Benutzer einer entsprechenden Software die Gleichungen und grundlegenden Strukturen einer Bewegung kennen muss, um einen Bewegungsablauf erfolgreich modellieren zu können. Dies gilt in besonderem Maße für die graphischen Modellierungsprogramme, in denen durch visuelle Aufbereitung der Zusammenhänge durch Pfeile Abhängigkeiten verdeutlicht werden. Aber auch gleichungsbasierte Modellbildungsprogramme erfüllen diesen Zweck, da der Nutzer auch hier die Einflussfaktoren auf die Bewegung modellieren muss und direkte Rückmeldungen über die Realitätsnähe erhält. „Der Unterricht [mit Modellbildungsprogrammen] zielt nicht auf eine große Anzahl von Einzellösungen für Spezialfälle ab. Die grundlegenden physikalischen Zusammenhänge werden betont“ (BETHGE UND SCHECKER 1990, S. 48), was daran liegt, dass Modelle die grundlegende Struktur von Bewegungen darstellen und durch Änderung einiger Parameter an eine Vielzahl neuer Bewegungen angepasst werden können.

Dabei können selbstständig Ideen und Hypothesen entwickelt werden, welche daraufhin erprobt werden. Aufgrund der Rückmeldung durch das Modellbildungsprogramm können die Ideen verbessert oder ganz verworfen werden, um das Modell schrittweise zu optimieren. Dies gelingt hauptsächlich durch den Vergleich mit der Realität – insbesondere durch die Kombination mit der Videoanalyse. Besonders hilfreich sind dabei die zum Teil möglichen Schieberegler für eine kontinuierliche Anpassung von Parametern wie Luftreibungskoeffizienten, Federkonstanten oder aber auch beispielsweise der Masse, wobei letztere meist durch das Experiment bekannt ist.

Damit wird der Nutzer von Berechnungen weitestgehend entlastet und der Fokus kann auf die physikalischen Zusammenhänge gelegt werden.

Somit lässt sich von einem dynamischen, schrittweisen Erkenntnisprozess reden, der eine offene Unterrichtsgestaltung ermöglicht und erfordert. So können die Lernenden selbst auf die Suche gehen und auch ihnen bekannte und alltägliche Probleme erforschen. Dies ist ein wichtiger Aspekt des Physikunterrichts, da einige Fehlvorstellungen und Lernschwierigkeiten der

Schülerinnen und Schüler darauf basieren, dass der Physikunterricht gedanklich von der Alltagswelt getrennt wird und in der Schule Gelerntes vermeintlich nicht für die Realität zutreffen muss (vgl. WILHELM 2005).

Dies ist zum Teil dadurch zu begründen, dass in der Regel nur Phänomene besprochen werden, die unter optimalen Laborbedingungen stattfinden und dann durch das Ignorieren von Reibungskräften und anderen unerwünschten Faktoren weiter vereinfacht werden, bis sie nicht mehr in ausreichendem Maß der Realität entsprechen. Es gibt nur wenige Bewegungen, deren mathematischer Formalismus einfach genug ist, um in der Schule analytisch gelöst zu werden, und auch in solchen Fällen liegt der Fokus zu stark auf der Berechnung und weniger auf der Beschreibung des Phänomens. Aber gerade im Bereich der Mechanik haben Schülerinnen und Schüler einige Erfahrungen und Vorstellungen. „Diese Alltagserfahrungen müssen aktiviert und mit den physikalischen Konzepten in Zusammenhang gebracht werden“ (WILHELM 2005, S.59). Dies kann dadurch erreicht werden, dass Schülerinnen und Schüler eigens ausgewählte Bewegungen nachmodellieren können, um zu erkennen, dass auch diese durch die Grundgesetze der Mechanik bestimmt sind, während die Berechnungen von den Modellierungsprogrammen übernommen werden. Der Forderung, dass Schülerinnen und Schüler „erfahren [sollen], dass das physikalische Wissen für die reale Welt relevant und in ihr anwendbar ist“ (LÜCK und WILHELM 2011, S.1), kann damit nachgekommen werden.

Insgesamt wird also „ein größerer Bereich von Phänomenen im Unterricht behandelbar“ (BETHGE und SCHECKER 1990, S. 48).

Auch andere Fehlvorstellungen können aufgedeckt und beseitigt werden. Die Modellierung offenbart beispielsweise unmittelbar, ob die Richtung der Kräfte richtig gewählt wurde, und verstärkt damit den Fokus auf den Vektorcharakter physikalischer Größen – insbesondere bei zweidimensionalen Bewegungen. Zudem wird der Zusammenhang zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung deutlich. Die Gleichung $F = m \cdot a$, welche meist in dieser Form gelehrt wird, kann den Eindruck vermitteln, dass eine Masse multipliziert mit einer Beschleunigung eine Kraft ergibt oder sogar erzeugt (vgl. LÜCK und WILHELM 2011).

Mathematisch sicher nicht falsch, ist hier doch die Kausalität etwas verdreht. Im Modellbildungsprogramm *Newton-II* wird die Gleichung in der Form $a = \frac{F}{m}$ dargestellt, was den Fokus darauf legt, dass das Verhältnis von Kraft zu Masse

eine Beschleunigung eines Objekts bewirkt. Die Kraft beschleunigt also einen Körper, während die Trägheit der Masse dieser Beschleunigung entgegenwirkt. So kann auch der Aspekt der Newton-Maschine gefördert werden. Die angreifenden Kräfte bestimmen zusammen mit der Masse die Beschleunigung eines Objekts, welche wiederum unmittelbar für die Geschwindigkeit und den Ort verantwortlich ist. Wenn bei Geschwindigkeit und Ort noch die Anfangsbedingungen mit einbezogen werden, kennt man alle Einflussfaktoren und kann die Trajektorie eines Objekts vorhersagen (vgl. LÜCK und WILHELM 2011).

Dieser sehr einfache Ansatz ist durch die Art der Bewegung aber beliebig erschwerbar, was in dieser Arbeit u.a. gezeigt werden soll.

Neben der Nachmodellierung ist auch die Vorhersage in einfachen Fällen in Kombination mit der Videoanalyse möglich. So müssen nicht nur Bewegungen nachmodelliert werden, vielmehr kann es auch eine sinnvolle Erkenntnis sein, zunächst eine Bewegung ohne die Messdaten der Videoanalyse zu modellieren und im Nachhinein zu erkennen, dass sich das Objekt im Optimalfall genauso verhält, wie es die Theorie vorhersagt. Dies setzt allerdings Kenntnis über alle Faktoren, wie etwa Reibkoeffizienten, voraus, betont aber nochmals den deterministischen Charakter der Mechanik. Sind alle Einflussfaktoren hinreichend genau bekannt, kann eine beliebige Bewegung vorhergesagt werden.

Umgekehrt kann man durch Nachmodellierung von bekannten Bewegungen einen Eindruck bekommen, wie groß Einflüsse von Reibung und Luftwiderstand sind. So kann eine Lerngruppe selbst herausfinden, dass beim freien Fall einer Bleikugel der Luftwiderstand ignoriert werden kann, während dies bei einem Papierkegel zu einem großen Fehler führt. Sonst wird diese Problematik oft nur durch die Lehrkraft oder Lehrbücher vorgegeben und muss von der Lerngruppe akzeptiert werden.

Auch ohne den Vergleich mit der Realität lassen sich Modellbildungsprogramme aber einsetzen, um den Einfluss einzelner Bewegungsparameter auf die Trajektorie zu untersuchen. So kann beispielsweise unter Hinzunahme von Luftreibung der optimale Abwurfwinkel bestimmt werden, um eine hohe Weite beim Speerwurf zu erreichen. Der Vergleich mit der Realität könnte wiederum Erkenntnisse liefern, ob es bei diesem Winkel biomechanisch überhaupt möglich ist, eine hohe Anfangsgeschwindigkeit zu erzeugen.

Die Einsatzmöglichkeiten solcher Software sind damit umfangreich, beschränken sich aber wiederum auf den Bereich der Mechanik. Im Folgenden werden verschiedene Möglichkeiten der mathematischen Modellbildung in Form von unterschiedlichen Programmen betrachtet.

3.2 Das Modellbildungsprogramm *Newton-II*

Für die von *measure Dynamics* per Videoanalyse erhobenen Daten wurde hier *Newton-II* genutzt, um die Modellierung der zu dieser Bewegung gehörenden Daten durchzuführen. Dazu wird bei *Newton-II* zunächst ein neues Dokument erstellt, bei dem man die Wahl zwischen eindimensionaler, zweidimensionaler und dreidimensionaler Bewegung hat. Von *measure Dynamics* wird stets eine x- und eine y-Komponente erhoben, wenn jedoch nur eine der beiden Größen relevant ist, reicht es, eine eindimensionale Bewegung auszuwählen, bei der die Ortskomponente dann mit s bezeichnet wird. Zweidimensionale Bewegungen benötigt man, falls sich das Objekt im Video in beide Raumrichtungen bewegt. Dreidimensionale Bewegungen sind im Rahmen dieser Arbeit irrelevant, da die Videoanalyse mit einer Kamera auf zwei Raumdimensionen beschränkt ist.

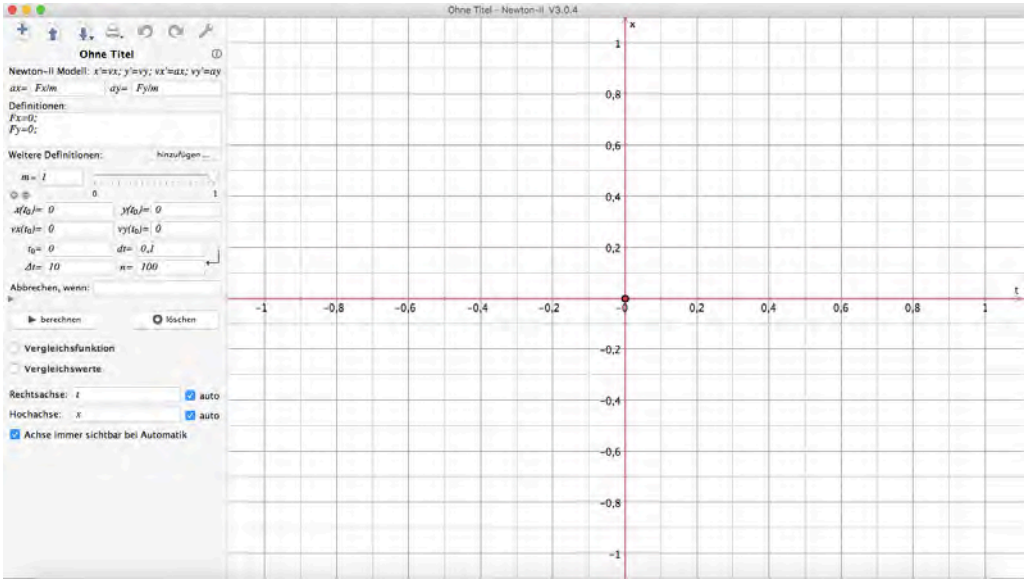


Abbildung 7: Benutzeroberfläche von N-II (Eigene Darstellung)

Nach Auswahl der jeweiligen Bewegung und Benennung der Datei erscheint die Nutzeroberfläche des Programms, welche ebenfalls sehr simpel gehalten ist (Abb. 7). Das Modell in *Newton-II* basiert auf den angreifenden Kräften. Der Zusammenhang $a = \frac{F}{m}$ ist schon voreingetragen und muss nicht von

Benutzerseite vorgenommen werden. Ziel einer Modellierung ist es dementsprechend, alle an dem Objekt angreifenden Kräfte so anzupassen, dass die modellierte mit der gemessenen Bewegung übereinstimmt. Um diese Übereinstimmung überhaupt überprüfen zu können, lassen sich Vergleichswerte einlesen und darstellen, die man aus der exportierten Tabelle aus *measure Dynamics* erhalten hat. Dafür sind Spalten für die Zeit-, Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponente vorhanden.

Nach Einlesen der Daten müssen die angreifenden Kräfte modelliert werden. Zum Verwenden von Orts-, Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsabhängigkeit sind die Variablen s, v und a bei eindimensionalen Bewegungen bzw. x, y, vx, vy, ax, ay bei zweidimensionalen Bewegungen vorgesehen. Für die Masse m ist ein Schieberegler von Null bis Eins voreingestellt, der gelöscht oder angepasst werden kann. Besonders, wenn sich die Masse im Laufe der Bewegung ändert, ist es notwendig, die Masse als Funktion der Zeit oder des Weges in dem Feld der wirkenden Kräfte zu definieren, womit der Schieberegler für die Masse entfernt werden muss. Auch die Grundgleichung $a = \frac{F}{m}$ kann bei Bedarf modifiziert werden. Sichtbar sind direkt die Anfangsbedingungen für Ort, Geschwindigkeit, aber auch Zeit. Dies ist hilfreich, falls eine Bewegung erst kurz nach Anfang des Videos beginnt und somit beispielsweise erst ab 0,1 s modelliert werden soll. Alternativ kann das Video noch einmal nachträglich geschnitten oder mit neuem Startzeitpunkt analysiert werden, wobei es zum Teil schwierig ist, den exakten Beginn einer Bewegung zu erkennen. Außerdem müssen die Modellierungsdauer und die Zeitschritte eingestellt werden, für die jeweils ein Wert berechnet werden soll. Daraus ergibt sich die Gesamtmenge an Werten n, die das Programm berechnet.

Auch kann man eine Abbruchbedingung formulieren, bei der das Programm ungeachtet der Zeit, die Modellierung abbricht. Als letztes kann nun noch eingestellt werden, welche Koordinate und deren Komponente im Diagramm daneben dargestellt werden soll. Dies sind zunächst die auf den ersten Blick ersichtlichen Einstellungen, was das Programm sehr einfach verständlich macht und keine zu große Einarbeitungszeit von Nöten ist. Allerdings gibt es noch weitere Einstellungen, die je nach Bewegung von Vorteil bzw. unumgänglich sind.

Gerade bei zweidimensionalen Bewegungen bietet es sich beispielsweise an, mehrere Diagramme übereinander anzeigen zu lassen, was sich problemlos im Reiter *Diagramm* einstellen lässt.

Möglicherweise notwendige Definitionen können auf einem Button unterhalb des Feldes der angreifenden Kräfte hinzugefügt werden. Dies beinhaltet Funktionen, Konstanten und Variablen. Besonders häufig wurden bedingte Variablen genutzt, da einer vom Quadrat der Geschwindigkeit abhängigen Reibung so gewährleistet werden kann, dass diese immer entgegengesetzt der Bewegungsrichtung ist. Dies ließe sich aber alternativ auch über einen Term $\frac{v}{|v|}$ lösen, der lediglich das Vorzeichen, nicht aber die Größe des Terms beeinflusst. Für die Beschreibung der Kräfte werden alle gängigen Funktionen, wie die trigonometrischen Funktionen, Wurzelfunktion, Betrag etc., erkannt.

Außerdem können über den Schraubenschlüssel-Button in Abbildung 7 noch einige Einstellungen vorgenommen werden, die das Erscheinungsbild des Diagramms betreffen, aber auch das Verfahren, welches zur Lösung der Differentialgleichungen genutzt wird. Voreingestellt ist hier das Runge-Kutta-Standardverfahren, welches mit der Kombination verschiedener Differenzenquotienten arbeitet. Obwohl noch einige andere Verfahren einstellbar sind, u. a. auch Polygonzüge nach Euler, wurde das voreingestellte Verfahren für alle Modellierungen beibehalten.

Praktisch sind in jedem Fall noch die erstellbaren Schieberegler, die es beispielsweise ermöglichen, den Luftwiderstandskoeffizienten mit einem Regler so lange anzupassen, bis die modellierte Bewegung der gemessenen entspricht.

Im Diagramm daneben werden die eingelesenen Tabellenwerte in Form von grünen Punkten angezeigt und die modellierte Kurve in Form von roten Punkten, welche durch Linien verbunden werden. So kann man sehr genau die beiden Bewegungskurven vergleichen.

Es bietet sich allerdings auch an, die Daten der Modellierung wiederum zu exportieren und in *measure Dynamics* einzufügen. Dazu kann eine .txt-Datei exportiert werden, welche manuell in *measure Dynamics* eingefügt werden kann, sodass man die zeitliche Abfolge von Realität und Modell während des Abspielens des Videos sehen kann.

3.3 Das Modellbildungsprogramm *Tracker*

Wie bereits erwähnt, vereint das Programm *Tracker* Videoanalyse und Modellbildung in sich und wird aufgrund dessen hier noch einmal bezüglich der mathematischen Modellbildung beschrieben.

Nach Import und Analyse des Videos kann auf Basis dessen ein Modell erstellt werden. Dazu hat man zunächst die Wahl zwischen einem kinematischen und einem dynamischen Modell. Ein kinematisches Modell benötigt die Ortskoordinaten als Funktion der Zeit. Dementsprechend muss man hier die Ortskurve des Objekts bereits kennen. Zielführender für die hier verfolgten Motive ist das dynamische Modell. Dieses entspricht dem von *Newton-II* und benötigt damit die an der Masse angreifenden Kräfte, um daraus die Beschleunigungs-, Geschwindigkeits- und Ortskomponenten zu errechnen. Wählt man ein dynamisches Modell, gibt es noch die Möglichkeit, sich zwischen rechtwinkligen Koordinaten, Polarkoordinaten und einem Zwei-Körper-System zu entscheiden. Hat man diese Wahl getroffen, erscheint dieses Modell zunächst neben der bereits „getrackten" Masse. Geht man nun auf das Modell und auf *Modell erstellen,* öffnet sich ein Fenster, in dem alle benötigten Werte eingetragen werden müssen. Darunter die Masse, die Anfangswerte der Zeit, des Ortes und der Geschwindigkeit für beide Koordinatenrichtungen und die angreifenden Kräfte in x- und y-Richtung. Auch kann man Parameter definieren, allerdings gibt es hier beispielsweise keine Option zum Einfügen einer bedingten Variable.
Außerdem fehlt eine Option, Schieberegler zu erstellen und Parameter so kontinuierlich anzupassen.
Die größte Schwäche an dieser Stelle ist aber, dass sich die Masse nicht in Abhängigkeit von Zeit oder Weg definieren lässt, was die Nutzungsmöglichkeiten dieser Modellierungssoftware etwas einschränkt und manche interessanten Modellierungen, wie etwa Versuche zum Rückstoßprinzip (siehe Kapitel 4.1.5), dadurch zum Teil wegfallen.

3.4 Das Modellbildungsprogramm *Coach 6*

Coach 6 unterscheidet sich zunächst deutlich von den anderen Modellbildungsprogrammen, da es sich hier um ein Programm für graphische Modellbildung handelt. Zunächst ist wieder etwas unübersichtlich, dass man eine eigene Modellierung über eine externe Datei aufrufen muss. Dies erfolgt über *Öffnen*, „2. Modellbildung Impulse Physik" und „_23.0_Eigene_Modelle". Hat man diese Datei geöffnet, erscheint die Benutzeroberfläche von *Coach 6* (Abb. 8).

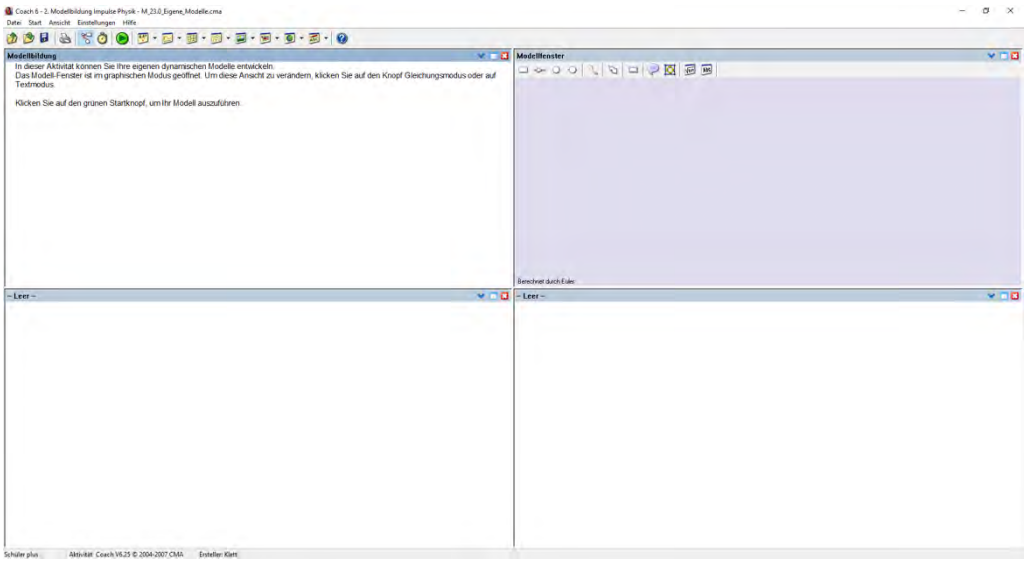


Abbildung 8: Benutzeroberfläche C6 (Eigene Darstellung)

Wichtig ist zunächst das Fenster rechts oben in der Benutzeroberfläche, in welchem die graphische Modellbildung durchgeführt wird. Dazu können die darüber ersichtlichen Schaltflächen genutzt werden, welche für verschiedene Funktionen in der Modellierung stehen. Es gibt Bestandsvariablen, Flussschaltflächen, Hilfsvariablen, Konstanten, Konnektoren, Ereignisse und Parameter. Die Modellierung erfolgt dann durch Verbinden der einzelnen Einflussgrößen und Definition der jeweiligen Gleichungen innerhalb der Formen. So werden auch die Anfangsbedingungen gewählt. Beim freien Fall kann die Modellierung wie folgt aussehen:

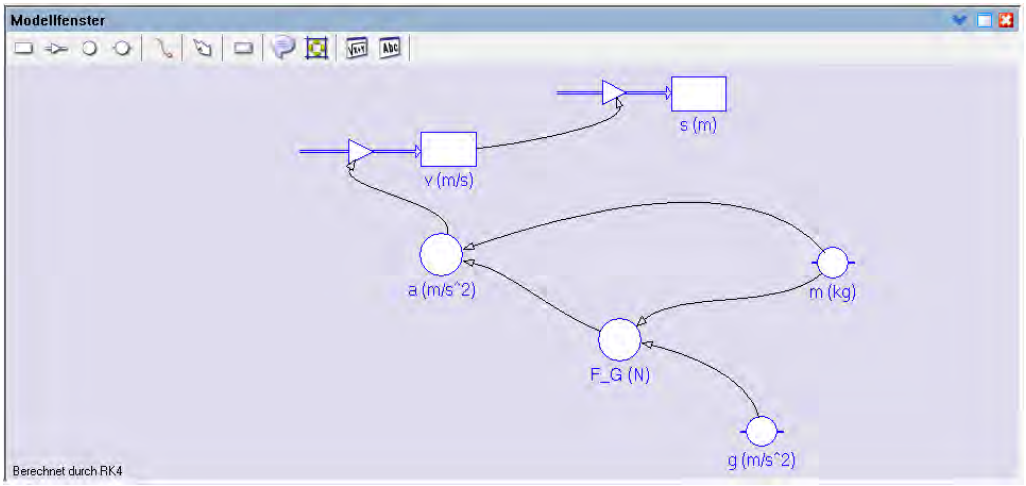


Abbildung 9: Modellierung des freien Falls in C6 (Eigene Darstellung)

Durch die graphische Modellbildung ist die Grundstruktur anschaulich dargestellt (Abb. 9). Auch aus Gleichungen lässt sich dies herauslesen, jedoch sind die Zusammenhänge und Einflüsse der Parameter auf die Bewegung durch eine graphische Darstellung für Lernende oft besser greifbar.

Nach Abspielen des Modells mithilfe des „grünen Pfeil“-Buttons lassen sich auch verschiedene Diagramme und Tabellen darstellen. Außerdem sind auf der

Schaltfläche, auf der eine Stoppuhr abgebildet ist, alle Einstellungen zu Anfang und Ende der Modellierung, Schrittweite sowie Abbruchbedingung und Integrationsmethode zu tätigen. Auch kann ein Abspielregler erzeugt werden, bei dem die Geschwindigkeit der Erzeugung des Modells gewählt werden kann. Die vordefinierte Integrationsmethode ist hier, anders als bei den vorigen Programmen, Euler.
Falls eine zweidimensionale Bewegung modelliert werden soll, müssen die Kräfte in die beiden Raumrichtungen getrennt voneinander modelliert werden und auch die Bestandsvariablen der Geschwindigkeit und des Weges müssen jeweils zwei Mal angelegt werden.
Auch ein Video und Analysedaten aus der Videoanalyse lassen sich importieren, sodass ein Vergleich mit der Realität möglich ist. Dies geschieht direkt durch den Import der Daten aus der Videoanalyse-Datei, wodurch das Erstellen und Importieren von Tabellen nicht nötig ist.

4 Kombination von Videoanalyse mit mathematischer Modellbildung

Das Potential von Videoanalyse und mathematischer Modellbildung kann am besten ausgeschöpft werden, wenn diese beiden Vorgehensweisen miteinander verknüpft werden.
Nun werden die Experimente vorgestellt, welche ausgewählt wurden, um analysiert und modelliert zu werden. Dazu werden bei allen Versuchen die gefundenen Parameter dargestellt, die die gemessene Bewegung am besten beschreiben. Jedoch soll der Leser dadurch nicht den Fokus auf die grundlegenden Strukturen verlieren, die wichtiger sind, als die ohnehin nicht in allen Fällen vollständig zuverlässigen Werte der Parameter. Es soll vor allem auf Abhängigkeiten und Zusammenhänge verwiesen werden, da dies eine der Stärken der Modellbildung ist.
Falls das Modell nicht optimal passt, soll auf eine mögliche Erklärung hingewiesen werden, so wie dies auch in der Schule nötig wäre. Auch wird bewusst auf Schwierigkeiten verwiesen, auf die Lehrkräfte oder auch eine Lerngruppe beim Vorbereiten bzw. Durchführen der Videoanalyse oder der Modellierung stoßen könnten, sodass diese vermieden werden können.

Zudem wurden alle Experimente mit allen Videoanalyse-/Modellbildungsprogrammen durchgeführt, um umfassende Erfahrungswerte mit den Vor- und Nachteilen der Programme zu generieren. Dargestellt werden die Ergebnisse aber zunächst einheitlich in *Newton-II*.
Die Versuche wurden so ausgewählt, dass sie einen großen Teil der Mechanik abdecken und hauptsächlich sehr grundlegende Experimente darstellen.

4.1 Eindimensional beschleunigte Bewegungen

Zunächst soll die einfachste Art von Versuchen beleuchtet werden – die eindimensionalen Bewegungen. Dies setzt natürlich voraus, dass die Koordinatenachsen im Videoanalyseprogramm so positioniert werden, dass die Bewegung auf einer der beiden Achsen abläuft – oder zumindest parallel zu dieser. Dies hat den Vorteil, dass nur Kraftkomponenten in eine der beiden Richtungen betrachtet werden müssen. Je nach Programm wird die andere Komponente gleich Null gesetzt oder es gibt nach der entsprechenden Einstellung nur noch eine Raumkoordinate, welche dann mit s bezeichnet wird.

4.1.1 Schwere Kugel

Zunächst wurde eine schwere Kugel fallen gelassen und gefilmt. Es wurde eine Mauskugel gewählt, die den Vorteil hat, dass sie mit Hilfe eines Elektromagneten gehalten und auf Knopfdruck fallen gelassen werden kann, sodass die Flugbahn nicht durch ungewollte Störfaktoren beeinflusst wird. Außerdem ist die Kugel durch ihre rote Farbe für die Programme gut zu erkennen und kann damit optimal „getrackt“ werden. Die Kugel wird neben einem Maßstab fallen gelassen und kann als eindimensionale Bewegung behandelt werden (Abb. 10).

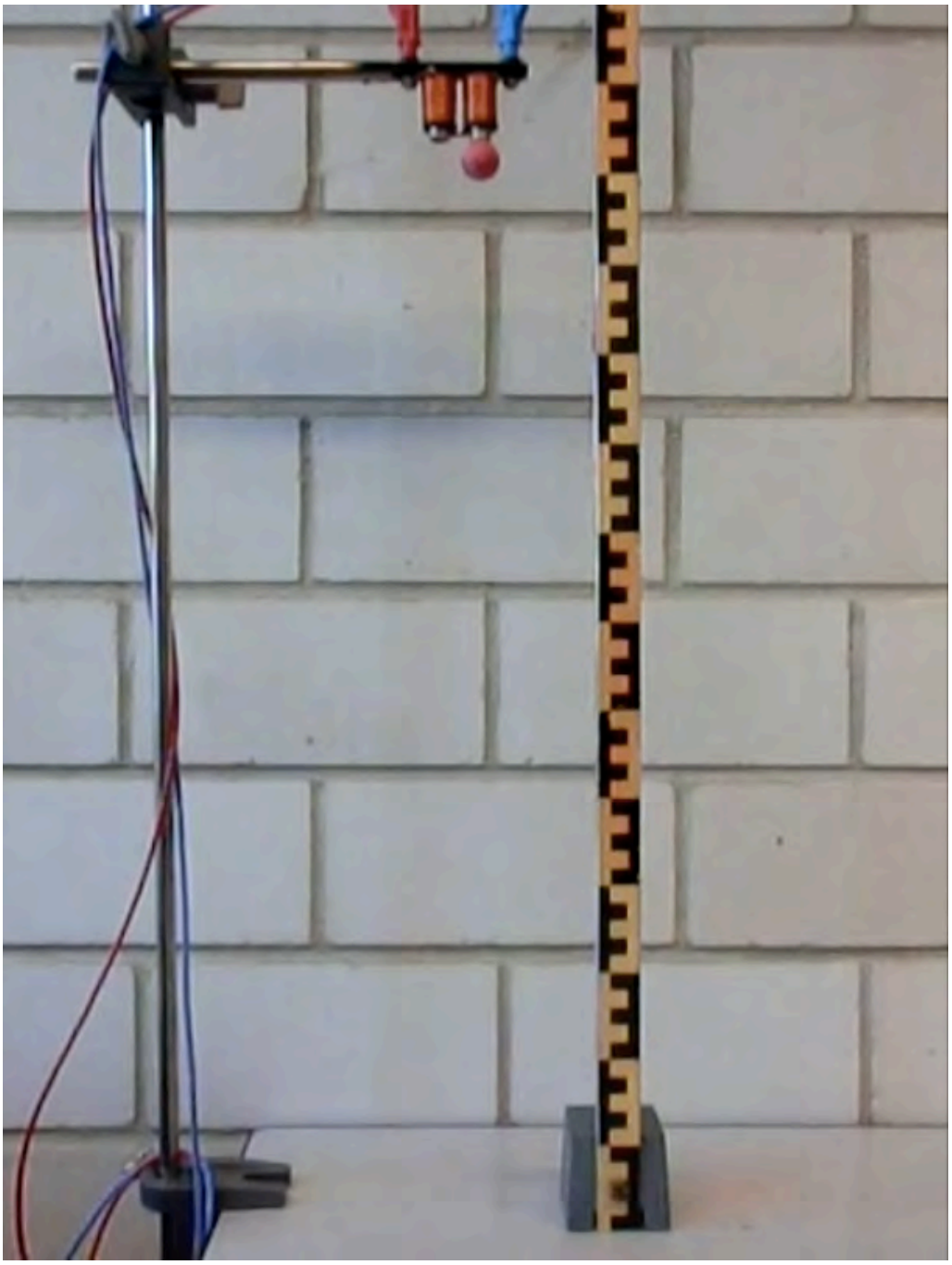


Abbildung 10: Versuchsaufbau freier Fall (Eigene Darstellung)

Das Video wurde aufgrund der gegen Ende relativ hohen Geschwindigkeiten mit 240 Bildern pro Sekunde gefilmt, wodurch die Auflösung aber reduziert wurde.

Gewählt wurde dieser sehr einfache Versuch, um das klassische Beispiel eines vereinfachten mathematischen Modells aus der Schule zu behandeln. Beim freien Fall wird nahezu immer die Luftreibung außer Acht gelassen, was dazu führt, dass das Problem in der Schule analytisch gelöst werden kann. In diesem Fall kann das Lösen durch einfache Integration erfolgen. Es gilt dann: $F_y = -m \cdot g$, also $m \cdot \ddot{y} = -m \cdot g$. Daraus folgt $\ddot{y} = -g$ und durch Integration damit

$\dot{y} = -gt + v_0$ und $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$. Dieses Vorgehen ist üblich, mit Luftreibung aber nicht mehr möglich. Wie groß der Fehler ist, der mit obiger Vereinfachung gemacht wird, wird in der Schule in aller Regel nicht deutlich. Dies sollte aber bei der Verwendung von Modellen stets bekannt sein und kann durch die Kombination von Videoanalyse und Modellbildung verdeutlich werden.

Wie bereits oben erwähnt, basiert *Newton-II*, mit dem die Modellierung zunächst durchgeführt wird, auf einem dynamischen, gleichungsbasierten Modell. Um die Bewegung eines Objekts zu analysieren, werden also alle angreifenden Kräfte benötigt.

Im konkreten Fall wurde die Kugel auf die y-Achse gelegt, so dass der Auftreffpunkt genau im Koordinatenursprung liegt. Dies hat den Vorteil, dass die Höhe der y-Komponente entspricht, welche die einzig relevante Koordinate ist und auch mit s bezeichnet werden kann.

An der Kugel greifen, ab dem Moment des freien Falles, nur die Gewichtskraft und eine entgegengerichtete Luftwiderstandskraft an, welche vom Quadrat des Betrags der Geschwindigkeit abhängt.

Zunächst wird aber der Effekt der Luftreibung außer Acht gelassen und das Problem so modelliert, wie es auch per Hand gelöst werden könnte:

$$F_y = -m \cdot g$$

Dabei war die Masse der Kugel $m = 31{,}21g$, während als Erdbeschleunigung immer $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$ verwendet wird.

Wenn man das Experiment so modelliert, erhält man ausreichend genaue Ergebnisse, da der Effekt der Reibung bei der Kugel sehr klein ist und beispielsweise perspektivische Verzerrungen einen größeren Effekt haben können, womit der Einfluss der Reibung irrelevant wird.

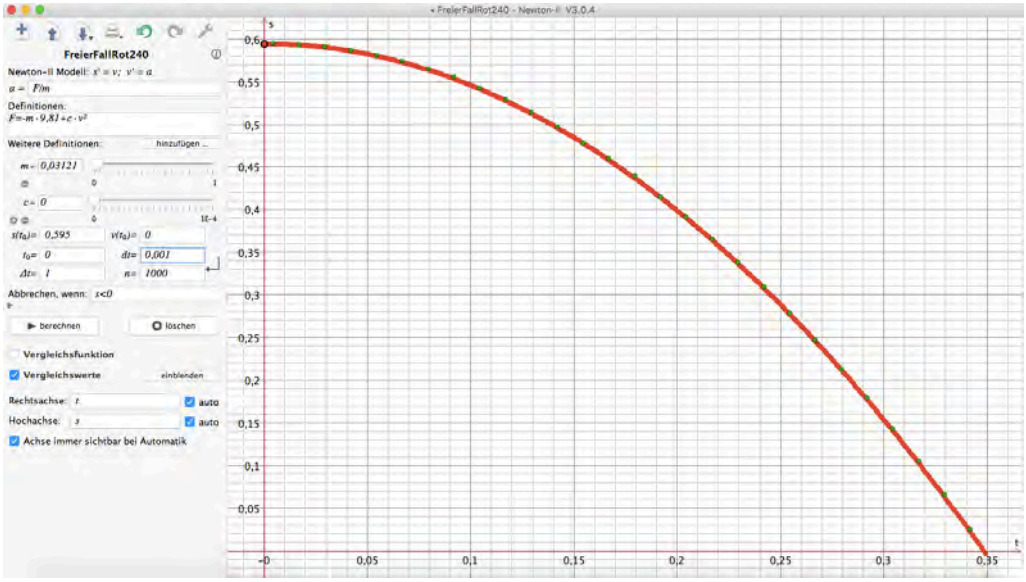


Abbildung 11: Modellierung freier Fall (Eigene Darstellung)

Dabei wurde der Luftreibungskoeffizient zunächst auf $c = 0$ gesetzt (Abb. 11). Um den Effekt der Reibung einschätzen zu können, ist es auch möglich, einen realistischen c_W-Wert nachzugucken, mit dem die Reibungskraft in Abhängigkeit der Geschwindigkeit ausgerechnet werden und der Gewichtskraft entgegengestellt werden kann. Die Luftdichte wird mit $\rho = 1{,}2\,\frac{kg}{m^3}$ angenommen, wovon man bei 20° C etwa ausgehen kann (KURZWEIL 2008, S. 108).

So wäre für die Kugel mit einem c_W-Wert von 0,45, welchen eine Kugel bei einer turbulenten Strömung etwa annehmen kann (OERTEL et al. 2011, S. 166), eine realistische Abschätzung, dass

$$F_R = \frac{c_W \cdot A \cdot \rho}{2} \cdot v^2 = \frac{0{,}45 \cdot \pi \cdot 0{,}01^2 m^2 \cdot 1{,}2\,\frac{kg}{m^3}}{2} \cdot v^2 = 8{,}5 \cdot 10^{-5}\,\frac{kg}{m} \cdot v^2.$$

Diesen Wert kann man in den Modellbildungsprogrammen modellieren und erkennt offensichtlich keinen Unterschied zu dem Modell ohne Luftreibung. Das kann man schon daran erkennen, dass die Kurve ohne Luftwiderstand bereits optimal passt.

Resultierend kann man festhalten, dass es legitim ist, beim freien Fall von schweren Objekten, welche man nur verhältnismäßig geringe Distanzen zurücklegen lässt, die Luftreibung zu ignorieren.

Der Versuch eignet sich vom Filmen über die Analyse bis zur Modellbildung sehr gut für Schülerinnen und Schüler, die damit einen Einstieg in die Thematik erhalten und erleben können, dass beim freien Fall eines solch dichten Körpers die Luftreibung zunächst keine Rolle spielt. Hier macht es also auch keinen sichtbaren Unterschied, welche Masse die Kugel (in einem gewissen Rahmen) hat, was im Modellbildungsprogramm durch Verstellen der Masse leicht

nachvollzogen oder durch ein weiteres Fallexperiment mit einer anderen Kugel gleichen Durchmessers und anderen Gewichts überprüft werden kann.

4.1.2 Papierhütchen

Etwas anders sieht es bei dem Fallenlassen eines Papierhütchens mit einer Masse von $m = 0{,}35g$ aus (Abb. 12).

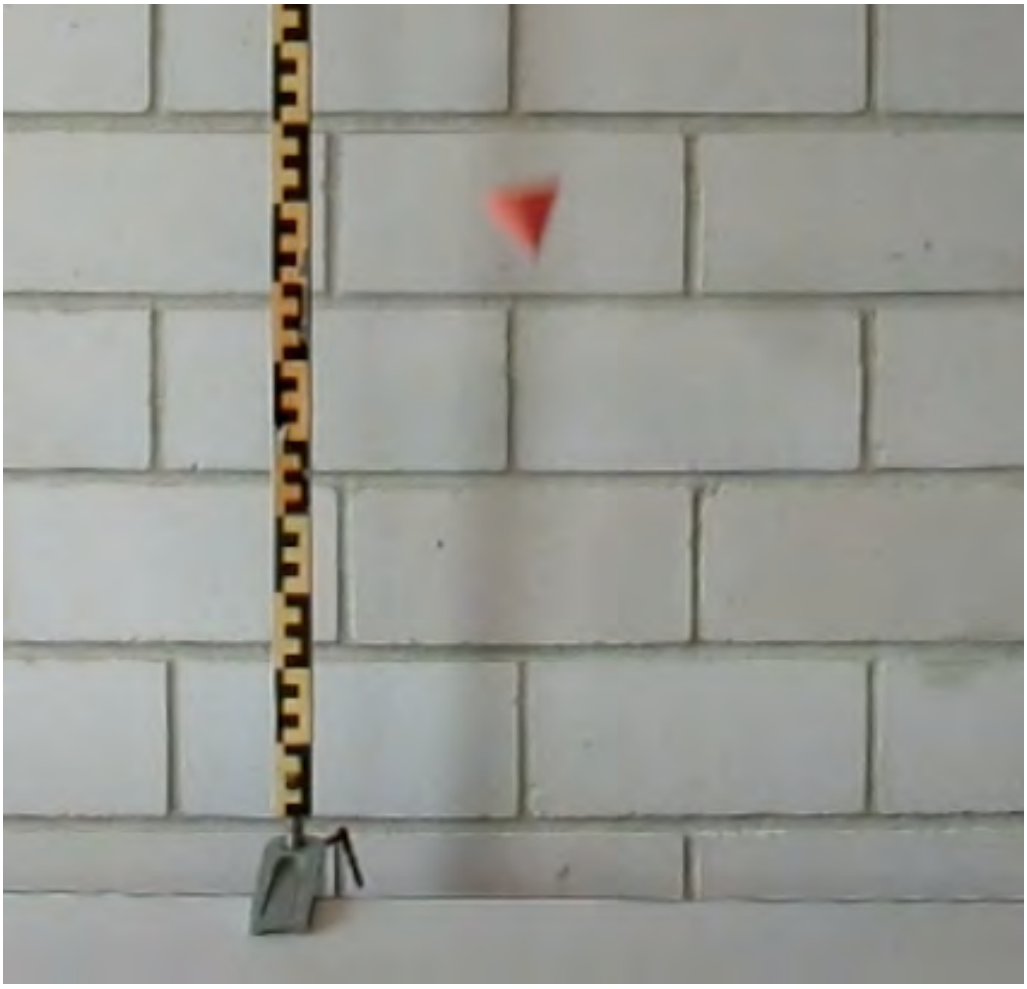


Abbildung 12: Versuchsaufbau fallender Kegel (Eigene Darstellung)

Dieser Versuch wurde bewusst so gewählt, dass das Verhältnis von Masse zu Luftwiderstandswert so ist, dass sich die Luftreibung nicht mehr vernachlässigen lässt. Würde man das Experiment ohne Luftreibung modellieren, sähe dies folgendermaßen aus (Abb. 13).

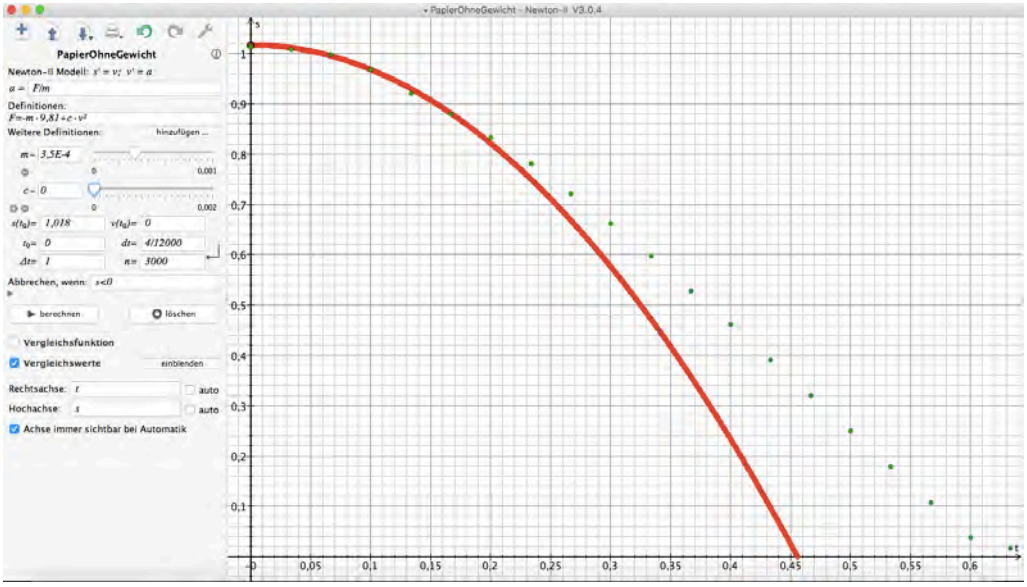


Abbildung 13: Modellierung ohne Luftreibung beim Fallkegel (Eigene Darstellung)

Man sieht einen großen Unterschied zwischen der gemessenen und der modellierten Flugbahn, was darauf hinweist, dass das Modell ohne Reibung für diesen Fall nicht ausreicht. Dies ist also gut dafür geeignet, darauf hinzuweisen, dass Reibung nicht immer vernachlässigt werden kann. Außerdem ist sichtbar, dass die Flugbahn im Weg-Zeit-Diagramm am Ende eine Gerade beschreibt, was bedeutet, dass die Geschwindigkeit konstant und die Beschleunigung Null ist. Das bedeutet, dass sich Gewichtskraft und Luftreibungskraft gerade im Gleichgewicht befinden, welches sich einstellt, wenn die Geschwindigkeit groß genug wird.

Modellieren kann man das Problem dann, indem man zunächst die angreifenden Kräfte so definiert, dass

$$F_y = -m \cdot g + c \cdot v^2.$$

Das c in der Gleichung ist noch nicht der c_W-Wert, sondern entspricht erstmal nur einer Konstante, die man für das Hütchen finden muss. Es bietet sich an, dafür beispielsweise einen Regler zu erstellen, mit dem man den Wert von c kontinuierlich verstellen kann.

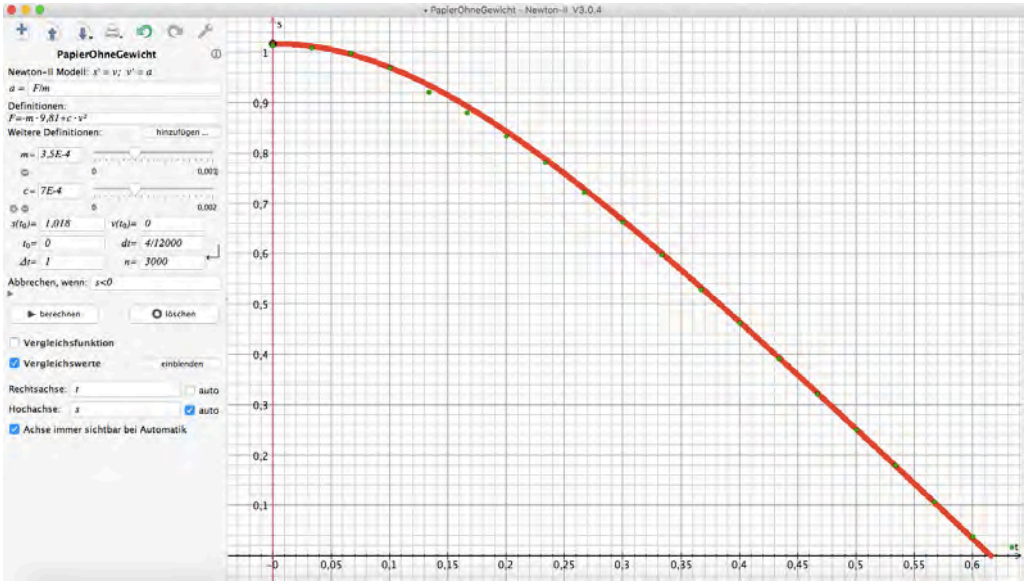


Abbildung 14: Modellierung mit Luftreibung beim Fallkegel (Eigene Darstellung)

Man findet bei optimaler Anpassung an das Video (Abb. 14) daraufhin einen Wert von $c = 7 \cdot 10^{-4} \frac{kg}{m}$. Dieser Wert lässt sich leicht mit der Theorie vergleichen. Die Luftwiderstandskraft ist $F = \frac{1}{2} c_W A \rho v^2$ und damit ist das hier genutzte $c = \frac{1}{2} c_W A \rho$. Das Hütchen hat eine Querschnittsfläche von etwa $0{,}002 m^2$. Wenn wieder von einer Luftdichte von $1{,}2 \frac{kg}{m^3}$ ausgegangen wird, die bei etwa 20° C Raumtemperatur herrscht, ergibt sich für den c_W-Wert:

$$c_W = \frac{2 \cdot 7 \cdot 10^{-4} \frac{kg}{m}}{0{,}002 m^2 \cdot 1{,}2 \frac{kg}{m^3}} = 0{,}58$$

Zu erwarten wäre für einen perfekten Kegel mit Spitze in Flugrichtung nach OERTEL et al. (2011) etwa ein Wert von $c_W = 0{,}5$, womit die Modellierung realistisch erscheint. Ob die Gleichungen hinter dem Modell aber tatsächlich realistisch sind oder weitere Faktoren vernachlässigt wurden, kann man sehr gut anhand von weiteren Papierhütchen mit anderem Gewicht überprüfen. In diesem Fall wird dasselbe Hütchen verwendet, welches mit verschiedenen Gewichten beschwert wird.

Man sieht bei einem mit einem Gramm beschwerten Papierhütchen, dass sich das Kräftegleichgewicht später einstellt und sich die Trajektorie der des freien Falls ohne Reibung etwas annähert (Abb. 15). Stimmt nun das zugrundeliegende Modell, bleiben die Gleichungen inklusive c_W-Wert identisch und nur die Masse des Hütchens ändert sich.

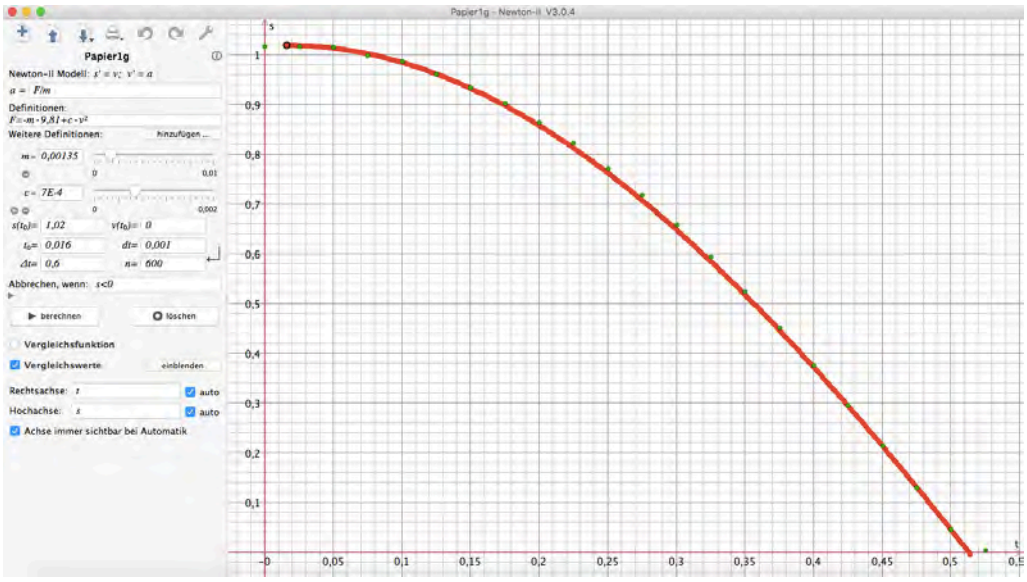


Abbildung 15: Modellierung mit Luftreibung beim mit einem Gramm beschwerten Fallkegel (Eigene Darstellung)

Wie in Abbildung 15 erkennbar, ist die Modellierungsqualität weiterhin sehr hoch, was dafürspricht, dass man den Luftwiderstandswert des Hütchens richtig ermittelt hat und keine weiteren Einflussfaktoren vorhanden sind, die vernachlässigt wurden.

Das Ganze kann man ebenfalls mit einem mit insgesamt zwei Gramm beschwerten Hütchen machen und erhält wieder eine gute Modellierung (Abb. 16).

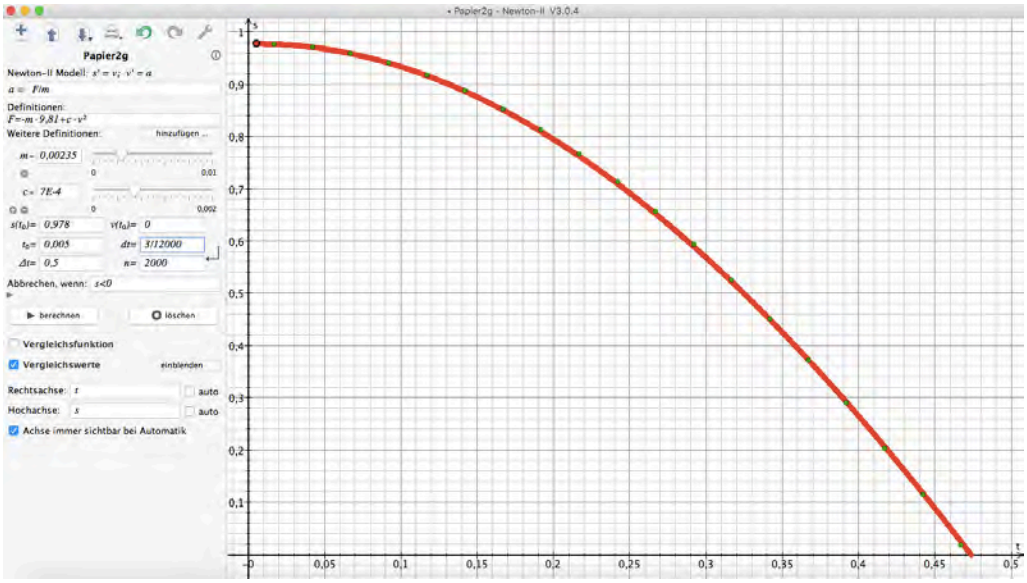


Abbildung 16: Modellierung mit Luftreibung beim mit zwei Gramm beschwerten Fallkegel (Eigene Darstellung)

Hier ist auch deutlich erkennbar, dass die konstante Geschwindigkeit erst etwa auf den letzten 35 cm zu beobachten ist, was bei dem unbeschwerten Hütchen etwa 80 cm über dem Boden bereits der Fall war.

Diese Erkenntnisse, welche durch die vorliegenden Fallexperimente erlangt wurden, können dazu dienen, den Einfluss von Masse und Luftwiderstand auf den freien Fall zu vertiefen.

Bei dessen Einführung wird in der Regel zunächst viel Wert daraufgelegt, zu verdeutlichen, dass die Beschleunigung und Geschwindigkeit nicht von der Masse des fallenden Objekts abhängig sind, was für Schülerinnen und Schüler zunächst auch kontraintuitiv und eine wichtige Erkenntnis ist. Dies gilt aber wiederum nur im Vakuum, und es darf nicht ignoriert werden, dass der Einfluss der Masse bei größer werdender Luftreibung immer stärker wird und in der Realität eben doch oft einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf alltägliche Bewegungen hat. Ebenso nimmt der Einfluss der Luftreibung bei immer kleiner werdender Masse zu. Letztlich geht es also um das Verhältnis von Masse zu Luftwiderstandskraft, da die Bewegungsgleichung folgende Gestalt hat:

$$m \cdot a_y = -m \cdot g + \frac{1}{2} c_W A \rho \cdot {v_y}^2$$

Und damit:

$$a_y = -g + \frac{c_W A \rho}{2m} {v_y}^2$$

Also kann der zweite Teil der Gleichung nur bei geringen Geschwindigkeiten, oder bei $c_W A \rho \ll 2m$ vernachlässigt werden.

Dieses Experiment kann auch von Schülerseite durchgeführt und modelliert werden – gerade in Kombination mit dem vorigen Versuch.

Durch die Kombination der beiden Experimente soll verdeutlicht werden, dass eine nur von der Gewichtskraft beschleunigte Bewegung zunächst von der Masse unabhängig ist, da die Masse sowohl als beschleunigender Faktor in der Gravitationskraft vorkommt, als auch die Bewegung als träge Masse bremst. Dies ist aber nur im Vakuum exakt der Fall, während auf der Erde gewisse Bedingungen gelten müssen, dass diese Näherung gilt. Sobald eine nicht zu vernachlässigende Luftreibung hinzukommt und die Geschwindigkeit größer wird, ist die Masse des fallenden Objekts sehr wohl relevant für die Bewegung.

4.1.3 Auto mit gleichbleibender Zugmasse

Eine andere Art von Reibung lässt sich gut mit den folgenden Experimenten thematisieren, in denen ein Auto auf einer Bahn von unterschiedlichen Gewichten gezogen wird – die Rollreibung.

Dazu wurde ein Wagen von der Lehrmittelfirma Phywe auf der dafür vorgesehenen Bahn platziert und ein Faden an diesem befestigt (Abb. 17). Dieser wurde über eine Rolle geführt und an ein Gewicht gebunden, welches den Wagen beschleunigen sollte.

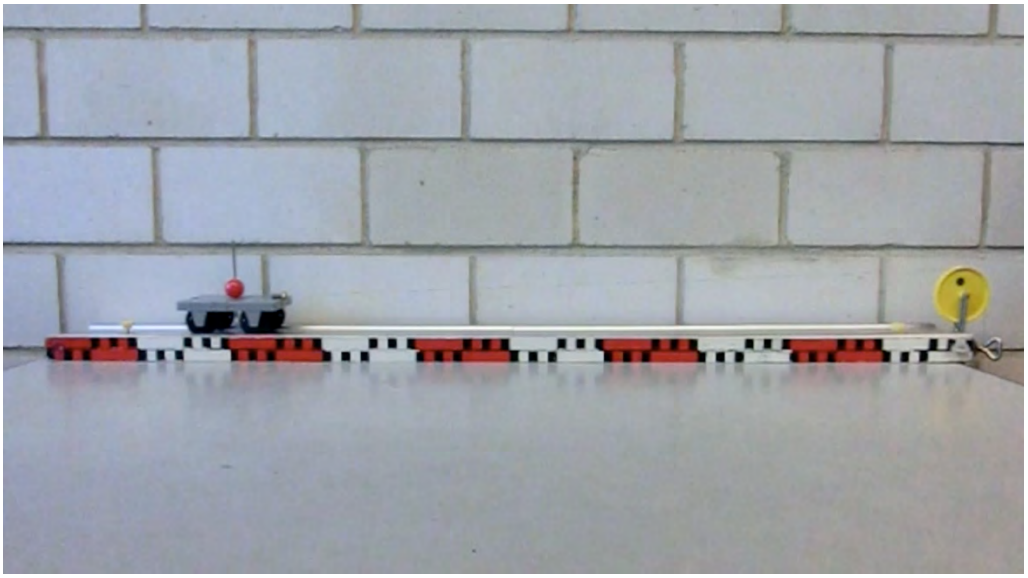


Abbildung 17: Versuchsaufbau fahrendes Auto (Eigene Darstellung)

Entsprechend ist es, wie die vorigen Experimente, eine eindimensionale, beschleunigte Bewegung, die von einer Gewichtskraft angetrieben wird. Nur ist nun die Masse, die für den Antrieb verantwortlich ist, ungleich der trägen Masse der Bewegung. Verantwortlich für die wirkende Kraft ist lediglich das Gewicht am Faden, das die Masse des Wagens – und seine eigene Masse – beschleunigen muss. Zudem tritt hier Rollreibung auf, welche nicht abhängig von der Geschwindigkeit, sondern von der wirkenden Normalkraft zwischen Wagen und Fahrbahn ist. Diese kann also in keinem Fall vernachlässigt werden. Hinzu kommt die Reibung in der Umlenkrolle, welche aber ebenfalls von der Normalkraft auf der Rolle abhängig ist (diese ist wiederum von der Seilkraft abhängig), und die Luftreibung durch die Bewegung des Wagens, welche durch die geringeren Geschwindigkeiten aber einen kleineren Einfluss auf die Bewegung hat als die Rollreibung. Des Weiteren hat die Umlenkrolle ein Trägheitsmoment, was der Bewegung zusätzlich entgegengesetzt ist. Die Bewegungsgleichung ist nun durch die Änderung des Aufbaus um einiges komplizierter geworden.

Um zunächst die Reibung bestimmen zu können, wurde das Auto mit einer Zugmasse von 5,3 g angetrieben. Diese Tatsache hat bei der Modellierung zunächst für Probleme gesorgt, da das Gewicht laut Aufschrift 10 g wiegen sollte und dies erst nach Fehlschlagen der ersten Modellierungsversuche mit einem Gewicht von 10 g überprüft wurde.

Auf dem Auto wurde für die Analyse ein roter Ball befestigt, der zu der Masse des Autos dazuzurechnen ist. Damit wog das Auto insgesamt 57,22 g.
Die Modellierung kann wieder Schritt für Schritt erfolgen und am Ende folgendermaßen aussehen:

$$F_x = m_{Gewicht} \cdot g - \mu_{Auto} \cdot F_N - \mu_{Rolle} \cdot F_{N_{Rolle}} - c \cdot v_x^2$$

Dafür würde man zunächst lediglich die antreibende Kraft modellieren und sich anschauen, wie viel das modellierte Auto zu schnell fährt. Das gibt Aufschluss über die wirkende Rollreibung. Mit diesen beiden Kräften ließe sich die Bewegung in guter Näherung modellieren. Da hier aber alle entscheidenden Faktoren berücksichtigt werden sollen, sodass das Modell auch in den folgenden Experimenten funktioniert, werden die Kräfte noch durch eine Reibung in der Umlenkrolle und eine Luftwiderstandskraft ergänzt, die sowohl auf das fallende Gewicht, als auch auf das fahrende Auto wirken.
Dabei ist wichtig, dass gesondert zu der angreifenden Kraft im Programm die richtige Masse, welche sich aus Auto und Zuggewicht zusammensetzt, eingetragen wird.
Die Bewegung ist also grundsätzlich von der Gewichtskraft der hängenden Masse, der Rollreibung des Autos, der Reibung in der Umlenkrolle und einer Luftwiderstandskraft abhängig.
Um nun die einzelnen Parameter durch die Modellierung anpassen zu können, sind Kenntnisse über die jeweiligen Normalkräfte erforderlich. F_N ist die Normalkraft zwischen Autos und Bahn. Wenn der Faden günstig befestigt ist, trägt das Zuggewicht nicht weiter zu dieser Normalkraft bei. Dadurch ist $F_N = m_{Wagen} \cdot g.\ g$ dabei wieder die Erdbeschleunigung. Der Luftwiderstandsterm wurde zuvor bereits besprochen (siehe Kapitel 4.1.2). Bleibt schließlich noch die Reibung in der Umlenkrolle. Diese ist primär abhängig von der auf die Rolle wirkenden Normalkraft, welche wieder abhängig von der Seilkraft und dem Einschlusswinkel ist. Es gilt also vereinfacht $F_{N_{Rolle}} \propto F_S$. Der Winkel betrug in diesem Fall bei allen Bewegungen etwa $\pi/2$ und kann aus Einfachheitsgründen damit aus der Formel herausgelassen werden. Die Seilkraft F_S wiederum ist proportional zur Beschleunigung des Systems, und damit zur ziehenden Masse, und zur gezogenen Masse, wobei letztere aber bei allen Fahrten identisch war. Nach Anpassen der Parameter liefert dies eine gute Näherung an die analysierte Bewegung.
Die genaue Gleichung für die Kraft ist in dem Fall:

$$F_x = m_{Gewicht} \cdot g - \mu_{Auto} \cdot F_N - b \cdot \mu_{Rolle} \cdot m_{Gewicht} - c \cdot {v_x}^2$$

Da aber nur das Produkt aus b und μ_{Rolle} modelliert wird, kann keine direkte Aussage über den Wirkungsgrad der Umlenkrolle getroffen werden. In der Modellierung wird nur $e = b \cdot \mu_{Rolle}$ modelliert, worin alle Proportionalitätsfaktoren stecken. Dies wurde aber bewusst so gewählt, um die Bewegungsgleichung möglichst einfach zu halten. Da aber in diesem Faktor unter anderem Erdbeschleunigung und die gezogene Masse stecken, ist die Größe von e nicht wirklich aussagekräftig.

Aufgrund des Gewichtes des Fadens und des Trägheitsmoments der Rolle wurden zur gemessenen Masse des Wagens noch 2,5 g hinzuaddiert.

Mit diesen angreifenden Kräften war eine zufriedenstellende Modellierung möglich (Abb. 18).

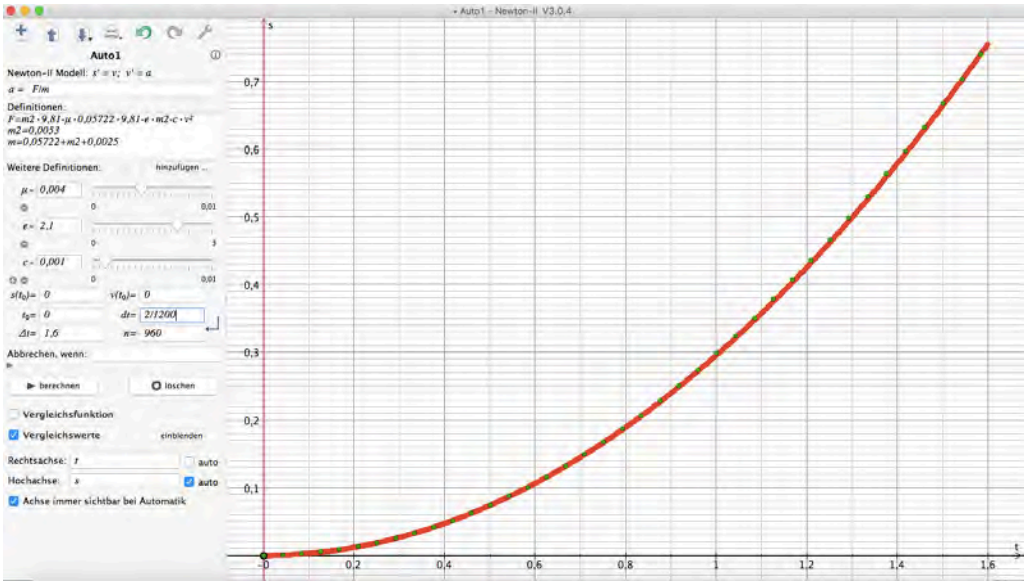


Abbildung 18: Modellierung Auto 1 (Eigene Darstellung)

Es ergibt sich $\mu_{Auto} = 0{,}004$, $e = 2{,}1\frac{m}{s^2}$ und $c = 0{,}001\frac{kg}{m}$.

Um das Modell weiter zu überprüfen, wurde das Auto nun noch mit 10,7 g und 15,8 g fahren gelassen. Es ändert sich damit die Zugmasse, die Gesamtmasse, die Rollreibung und die Reibung in der Rolle, da diese von der Seilkraft abhängig ist.

Damit das vorher gefundene Modell aber korrekt und aussagekräftig ist, müssen die zugrundeliegende Gleichung, der Rollreibungskoeffizient zwischen Wagen und Bahn, der Faktor für die Reibung in der Rolle und auch der Luftreibungsfaktor konstant bleiben. Dies schränkt folglich die Anpassung der Gleichungen deutlich ein, soll aber als eine Kontrolle des Modells als solches dienen, da man unter Umständen auch mit einer anderen, und damit falschen, Kombination von Parametern eine einzelne Bewegung beschreiben kann. Wenn die optimalen Parameter aber bei fünf aufeinander folgenden Experimenten übereinstimmen, müssen diese den real wirkenden Werten

entsprechen – bis auf eine kleine Fehlerspanne, die auch durch die Perspektive beim Filmen oder kleine Abweichung in der automatischen Videoanalyse vorhanden ist.

Es wird nun also weiterhin mit $\mu_{Auto} = 0{,}004$, $e = 2{,}1\frac{m}{s^2}$ und $c = 0{,}001\frac{kg}{m}$ gearbeitet. Mit den geänderten Massen besteht das zuvor gefundene Modell weiterhin und liefert auch für die beiden weiteren Fahrten des Wagens eine gute Näherung an die gemessene Bewegung.

Das Auto mit 10,7 g Zugmasse lieferte folgendes Bild (Abb. 19):



Abbildung 19: Modellierung Auto 2 (Eigene Darstellung)

Das Auto mit 15,8 g Zugmasse ließ sich folgendermaßen anpassen (Abb. 20):

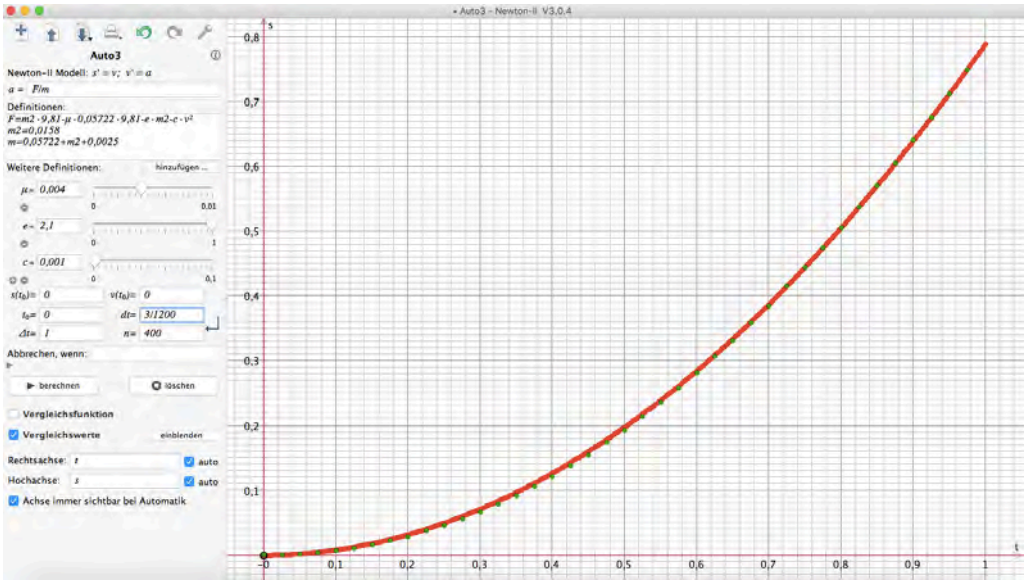


Abbildung 20: Modellierung Auto 3 (Eigene Darstellung)

Der Rollreibungskoeffizient von $\mu_{Auto} = 0{,}004$ ist nach BÖGE (2006, S. 12) in einem ähnlichen Bereich wie der eines Straßenbahnrads auf einer Schiene ($\mu =$

$0{,}005)$ und damit einigermaßen realistisch. Der Luftwiderstandsparameter c entspräche einem c_W-Wert von abgeschätzt

$$c_W = \frac{2 \cdot 0{,}001 \frac{kg}{m}}{0{,}0036m^2 \cdot 1{,}2 \frac{kg}{m^3}} = 0{,}46.$$

Dieser ist für ein Objekt von unregelmäßigen Ausmaßen schwer zu überprüfen, liegt aber in einem annehmbaren Bereich, zumal auch das fallende Gewicht noch einen gewissen Teil beiträgt.

Auch hier sind Experiment und Modellierung von Schülerseite durchführbar. Optimal wäre eine sehr leicht und gut gelagerte Umlenkrolle, so dass diese die Bewegung nicht spürbar beeinflusst, da sonst weitere Kenntnisse über die Rolle von Nöten sind. Möglich wäre aber auch eine Modellierung mit einem einzigen normalkraftabhängigen Term, der alles beinhaltet, oder die Wahl von Zuggewichten mit höheren Massen, sodass die Reibungseffekte allgemein einen kleineren Einfluss haben.

4.1.4 Auto mit sich ändernder Zugmasse

Etwas komplizierter wird es, wenn sich die Zugmasse zusätzlich während der Bewegung ändert. Am besten lässt sich eine wegabhängige Zugmasse mit einer Kette realisieren. Zunächst ersetzt die Kette das Gewicht, welches das Auto in den Experimenten vorher gezogen hat. Damit wirkt am Anfang der Bewegung die größte Gewichtskraft, während sich die Kette in Abhängigkeit des Weges des Wagens immer weiter auf den Boden legt und somit ein immer kleiner werdender Anteil der Kette für die Zugkraft verantwortlich ist.

Im konkreten Beispiel sind zunächst 96,5 cm der einen Meter langen Kette in der Luft, was bedeutet, dass ihr unterer Teil bereits auf dem Boden aufliegt und sich die Masse damit unmittelbar in Abhängigkeit des Weges x verringert. Damit kann man die Bewegungsgleichung wieder folgendermaßen aufstellen:

$$F_x = m_{Kette}(x) \cdot g - \mu_{Auto} \cdot F_N - e \cdot m_{Kette}(x) - c \cdot {v_x}^2$$

Interessant ist dabei die Funktion der Masse in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg:

$$m_{Kette}(x) = m_{Kette} \cdot \left(\frac{l_0 - x}{l_{Kette}}\right) = 0{,}01337kg \cdot \left(\frac{0{,}965m - x}{1m}\right)$$

Die träge Masse ist ebenfalls abhängig von dem zurückgelegten Weg:

$$m(x) = 0{,}05722kg + m_{Kette}(x) + 0{,}0025kg$$

Dabei ist m_{Kette} die Gesamtmasse der hängenden Kette und der Luftwiderstandswert der der vorigen Experimente, da sich am Auto selbst nichts geändert hat. Der Reibungswert ist für das Auto ebenfalls identisch geblieben, aber durch die Änderung der Seilkraft ist die Reibung in der Umlenkrolle wieder eine andere. Außerdem wurden erneut 2,5 g für den Faden und die Trägheit der Umlenkrolle zu der Gesamtmasse addiert.

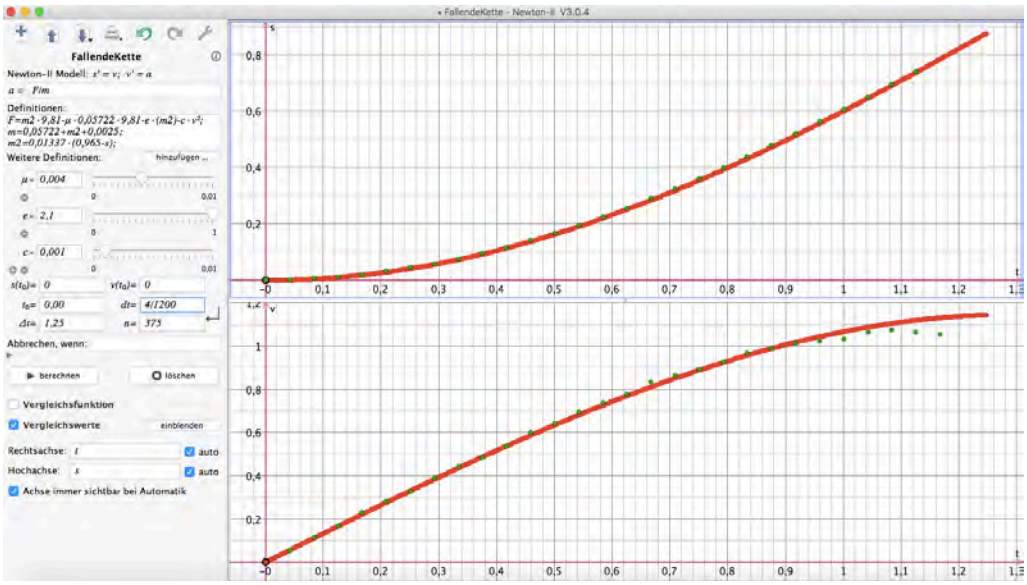


Abbildung 21: Modellierung fallende Kette (Eigene Darstellung)

Zu sehen in Abbildung 21 ist das Weg-Zeit- und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm. Gegen Ende der Bewegung ist die modellierte Geschwindigkeit eindeutig zu groß. Dies liegt aber daran, dass die Kette sich immer mehr aufrollt und der restliche Teil der Kette nicht mehr bis zum Boden, sondern nur bis auf den vom Anfang der Kette gebildeten Haufen fällt. Außerdem besitzt die Kette durch ihre Steifigkeit einen immer größer werdenden Widerstand gegen das Aufrollen, was ebenfalls der Bewegung entgegengesetzt ist. Folglich wird die Zugmasse gegen Ende schneller kleiner, als modelliert wurde. Damit geht die Beschleunigung bereits auf Null bevor das Auto die 96,5 cm zurückgelegt hat (Abb. 21).

Darüber hinaus ist nun interessant, was passiert, wenn ein immer größer werdender Teil der Kette das Auto zieht, sodass die Beschleunigung im Laufe der Bewegung zunimmt. Dazu wurde die Kette direkt am Auto befestigt und über die Umlenkrolle gelegt. Ein Teil der Kette liegt folglich mit auf der Bahn auf und trägt mit seinem Gewicht ebenfalls zu der Rollreibung des Autos bei. Diese verändert sich also im Laufe der Bewegung und ist somit nochmal schwieriger zu modellieren.

Man kann für die angreifenden Kräfte also folgendes annehmen:

$$F_x = m_{Kette}(x) \cdot g - \mu_{Auto} \cdot F_N - e \cdot m_{Kette}(x) - c \cdot {v_x}^2$$

Für die Zugmasse gilt:

$$m_{Kette}(x) = m_0 \cdot \left(\frac{0{,}172m + x}{1m}\right)$$

Die träge Masse ist hier wiederum konstant:

$$m = 0{,}05722kg + 0{,}01337kg + 0{,}0015kg$$

Hier wurden aufgrund des Fehlens eines Fadens nun nur noch 1,5 g zur Masse addiert.

Allerdings ist die Normalkraft wiederum nicht konstant:

$$F_N = m_l(x) \cdot g$$

$$m_l(x) = (1 - 0{,}172 - s) \cdot 0{,}01337kg + 0{,}05722kg$$

Dies kommt zustande, da die Kette insgesamt 13,37 g wiegt und anfangs 17,2 cm von einem Meter überhängen. Die 0,05722 kg des Autos ändern sich wiederum nicht.

Der Reibungskoeffizient ist nun auch ein anderer, da die Kette zusätzlich auf dem Boden schleift.

Modelliert man nun so, erhält man folgendes Ergebnis:

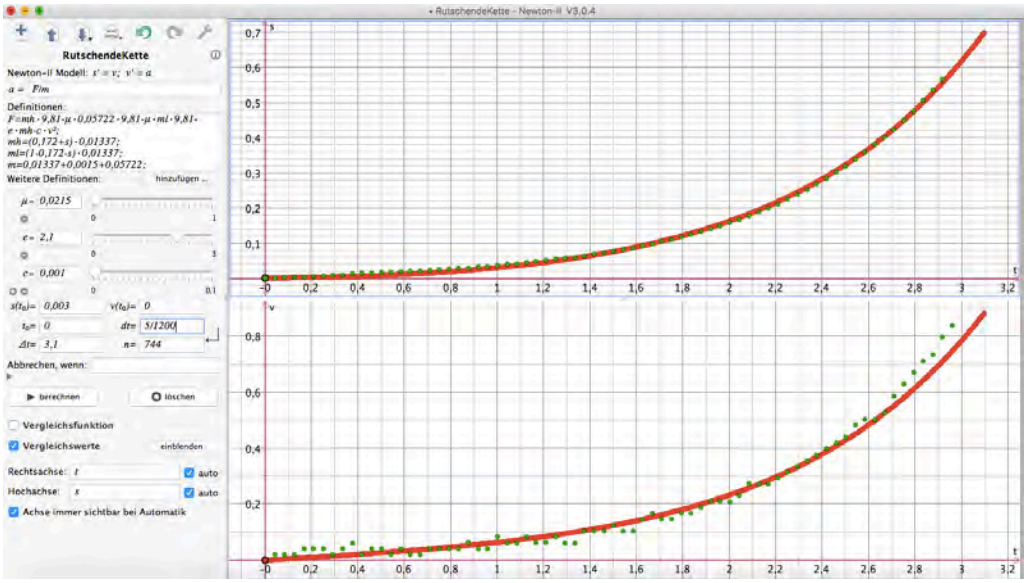


Abbildung 22: Modellierung rutschende Kette ohne Korrektur (Eigene Darstellung)

Diesmal ist zu erkennen, dass die modellierte Geschwindigkeit am Ende zu gering ist (Abb. 22). Das liegt in diesem Fall daran, dass die Kette, welche zu Anfang der Bewegung auf der Fahrbahn aufliegt, einen anderen Reibkoeffizienten besitzt, als das fahrende Auto. Realistischer ist also eine getrennte Modellierung:

$$F_R = \mu_1 F_{N_1} + \mu_2 F_{N_2} = 0{,}004 \cdot 0{,}05722kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}$$

$$+\mu_2 * (1 - 0{,}172 - s) \cdot 0{,}01337kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}$$

Dadurch kann die Abweichung deutlich verringert werden (Abb. 23). μ_1 muss dann wieder den gleichen Wert wie zuvor annehmen, und μ_2 ist ein noch unbekannter Reibkoeffizient zwischen Kette und Fahrbahn, der bei guter Modellierung einen Wert von $\mu_2 = 0{,}115$ aufweist.

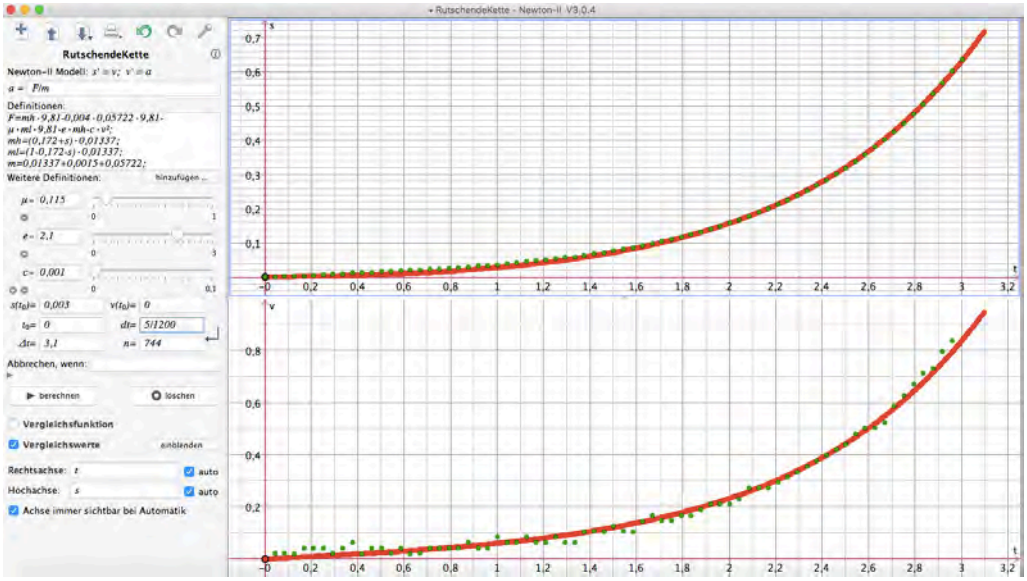


Abbildung 23: Modellierung rutschende Kette mit Korrektur (Eigene Darstellung)

Wieder kann die Bewegung durch die oben verwendeten Parameter und durch die Eigenschaften der sich ändernden Masse sehr gut angepasst werden.

Die letzten beiden Experimente stellen bereits einen etwas höheren Schwierigkeitsgrad dar und könnten möglicherweise angeleitet modelliert werden. Dabei würde es sich anbieten, dass die Lerngruppe zusammen an Ideen arbeitet, welche die Lehrkraft an einem für alle sichtbar auf eine Leinwand projizierten PC ausprobiert, wodurch die Bewegung nach und nach angepasst werden kann.

Sicherlich wäre es auch möglich, den ein oder anderen genutzten Faktor für die Modellierung zu vernachlässigen, da vieles nicht entscheidend in die Bewegung eingreift. Zunächst sollte aber dargestellt werden, dass ein gefundenes Modell hohe Aussagekraft für weitere, ähnliche Bewegungen hat. Es ließe sich aber auch eine ausreichende Genauigkeit erreichen, wenn lediglich eine normalkraftabhängige Reibung und eine geschwindigkeitsabhängige Reibung zugrunde gelegt werden würden und die Parameter daraufhin angepasst werden würden.

Dies ließe aber weniger Rückschluss darauf zu, wie groß einzelne Parameter sind. $\mu_{Auto} = 0{,}004$ liefert hier beispielsweise eine Information über die Reibung zwischen Wagen und Fahrbahn. Dieser Wert liegt, wie bereits thematisiert, auch in einem realistischen Bereich.

4.1.5 Wasserauto

Das Wasserauto besteht aus dem gleichen Auto, allerdings ohne Stange und Ball, auf das nun eine Wasserflasche gestellt wird, bei der am unteren Ende ein Ausflussröhrchen angebracht ist (Abb. 24).

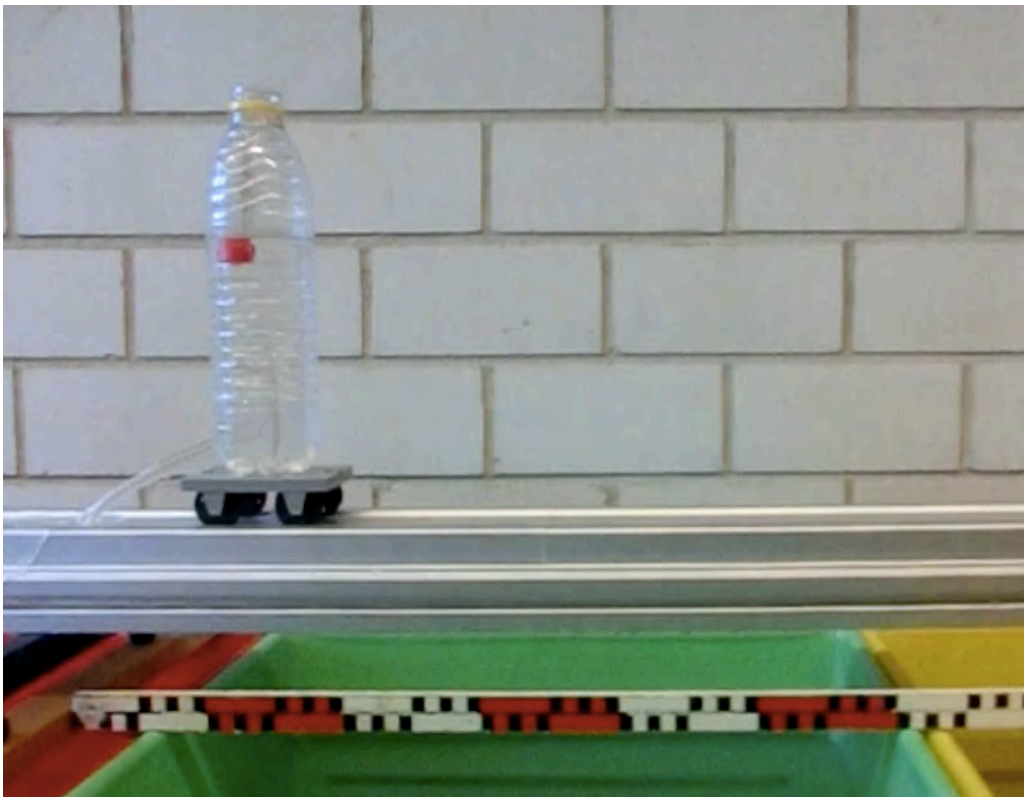


Abbildung 24: Versuchsaufbau Wasserauto (Eigene Darstellung)

Durch das Ausströmen des Wassers erfährt der Wagen eine Impulsänderung, da der Gesamtimpuls des Systems konstant bleiben muss. In diesem Experiment ändert sich im Gegensatz zu den vorigen Experimenten die Masse des Wagens ebenfalls, allerdings nicht unmittelbar abhängig vom Weg, sondern primär von der Zeit. Die Änderung des Füllstands der Flasche ist aber wiederum verantwortlich für den Vortrieb des Wagens. Als störende Faktoren kommen nach wie vor die Reibung der Bahn und die Luftreibung des Autos hinzu, welche durch die größere Querschnittsfläche nun natürlich auch größer geworden ist, durch die geringe Geschwindigkeit aber keinen merklichen Einfluss auf die Bewegung hat. Weiterhin muss mit erheblicher Reibung innerhalb des Wassers in der Flasche gerechnet werden, wodurch man realistischerweise nicht von einer Idealisierung des Ausflussgesetztes ausgehen kann. Die Vortriebskraft des Wagens lässt sich folgendermaßen definieren:

$$F_x = \frac{dm}{dt} \cdot v_{aus} - \mu_{Roll} \cdot F_N - c \cdot {v_x}^2$$

(vgl. ROTH und STAHL 2016, S. 138)

Da nun $\frac{dm}{dt} = A_r \cdot \rho \cdot v_{aus}$ ergibt sich:

$$F_x = b \cdot A_r \cdot \rho \cdot v_{aus}^2 - \mu_{Roll} \cdot F_N - c \cdot {v_x}^2$$

Hierbei ist v_{aus} die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers, ρ die Dichte des Wassers und A_r die Querschnittsfläche des Röhrchens. Der Faktor b wurde eingefügt, um die Verluste durch Reibung in der Flüssigkeit zu modellieren, da die Flasche in Realität nicht die vollständige Schubkraft erfährt. Nun ist aber v_{aus} wiederum von der Füllhöhe der Flasche abhängig. Nach GIANCOLI (2006) gilt die Bernoullische Gleichung:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

Dabei sind „die Punkte 1 und 2 zwei beliebige Punkte, entlang einer durchflossenen Röhre“ (GIANCOLI 2006, S. 468). Hier wählen wir Punkt 1 als Ausflussrohr und Punkt 2 als Wasseroberfläche in der Flasche.
Dann gilt $p_1 = p_2$, da beide Punkte Atmosphärendruck haben. Dadurch lässt sich ρ wegkürzen und es gilt:

$$\frac{1}{2} v_{aus}^2 + g y_1 = \frac{1}{2} v_{sink}^2 + g y_2$$

Aus der Beziehung

$$v_{sink} A_{Fl} = v_{aus} A_r$$

folgt

$$v_{sink} = \frac{A_r}{A_{Fl}} v_{aus}$$

Mit $h = y_2 - y_1$ folgt aus der Bernoullischen Gleichung für diesen konkreten Fall:

$$v_{aus}(h) = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_r}{A_{Fl}}\right)^2}}$$

Damit kann auch die Sinkgeschwindigkeit angeben werden:

$$v_{sink} = \frac{A_r}{A_{Fl}} v_{aus} = \frac{A_r}{A_{Fl}} \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_r}{A_{Fl}}\right)^2}}$$

Nun ist die Sinkgeschwindigkeit des Wassers die negative Ableitung der Füllhöhe $h(t)$. Also:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_r}{A_{Fl}} \sqrt{\frac{2g}{1 - \left(\frac{A_r}{A_{Fl}}\right)^2}} \cdot \sqrt{h}$$

Durch separieren der Variablen und anschließender Integration folgt mit $t(0) = 0s$ und $h(0) = h_0$:

$$h(t) = \frac{1}{4}\left(\left(-\frac{A_r}{A_{Fl}}\sqrt{\frac{2g}{1-\left(\frac{A_r}{A_{Fl}}\right)^2}}\right)t + 2\sqrt{h_0}\right)^2$$

(vgl. SPURK 2010, S. 290)

Dies wurde hergeleitet, um auch in diesem Experiment Realität mit Modell zu vergleichen. Mit den hier vorhandenen Größen wäre:

$$h(t) = \frac{1}{4}\left(\left(-\frac{0{,}00007m^2}{0{,}004m^2}\sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{1-\left(\frac{0{,}00007m^2}{0{,}004m^2}\right)^2}}\right)t + 2\sqrt{0{,}14m}\right)^2$$

$$= 0{,}0015\frac{m}{s^2}t^2 - 0{,}029\frac{m}{s}t + 0{,}14m$$

Da sowohl x- als auch y-Koordinate gemessen wurden, lässt sich die theoretische berechnete Höhe des Wassers mit der tatsächlichen vergleichen (Abb. 25).

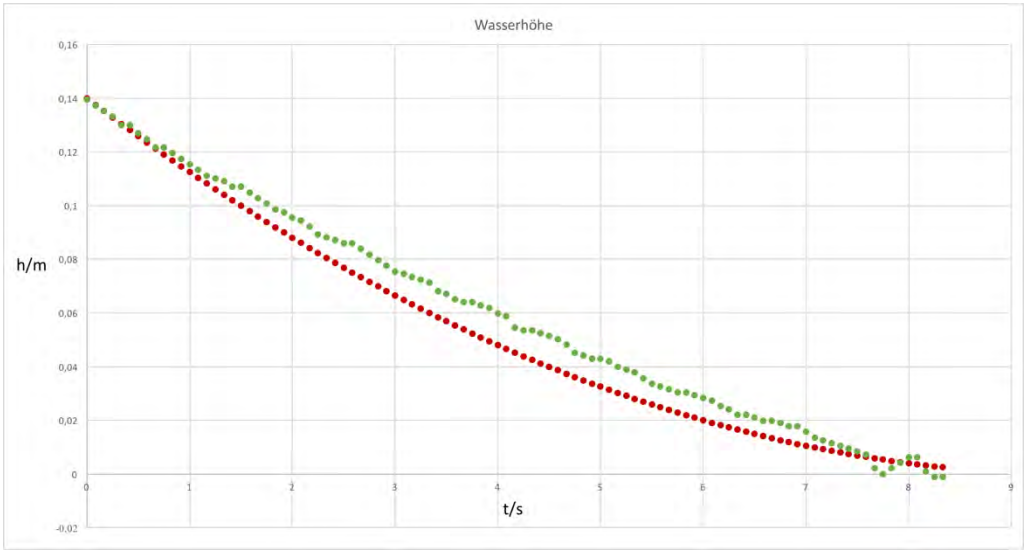


Abbildung 25: Vergleich modellierter mit realer Wasserhöhe (Eigene Darstellung)

Hier ist wieder die reale Wasserhöhe in grün und die modellierte in rot dargestellt (Abb. 25). Man erkennt, dass die reale Wasserhöhe etwas flacher verläuft, als dies von der Theorie vorausgesagt wird.

Wenn man nun $h(t)$ in $v_{aus}(h)$ einsetzt, und das wiederum für die angreifende Kraft benutzt, kann man die Trajektorie des Wasserautos modellieren. Ebenso ist aber $v_{aus} = \frac{A_{Fl}}{A_r}v_{sink}$ und $v_{sink} = \frac{d}{dt}h(t)$.

Also gilt $v_{aus} = \frac{A_{Fl}}{A_r}\left(0{,}0015\frac{m}{s^2}t - 0{,}029\frac{m}{s}\right)$.

Dies kann nun direkt in die obige Gleichung eingesetzt werden. Der Reibungskoeffizient und der Luftwiderstandskoeffizient sind bereits aus den

vorigen Experimenten bekannt. Das Röhrchen war etwa 5 cm über dem Flaschenboden angebracht.

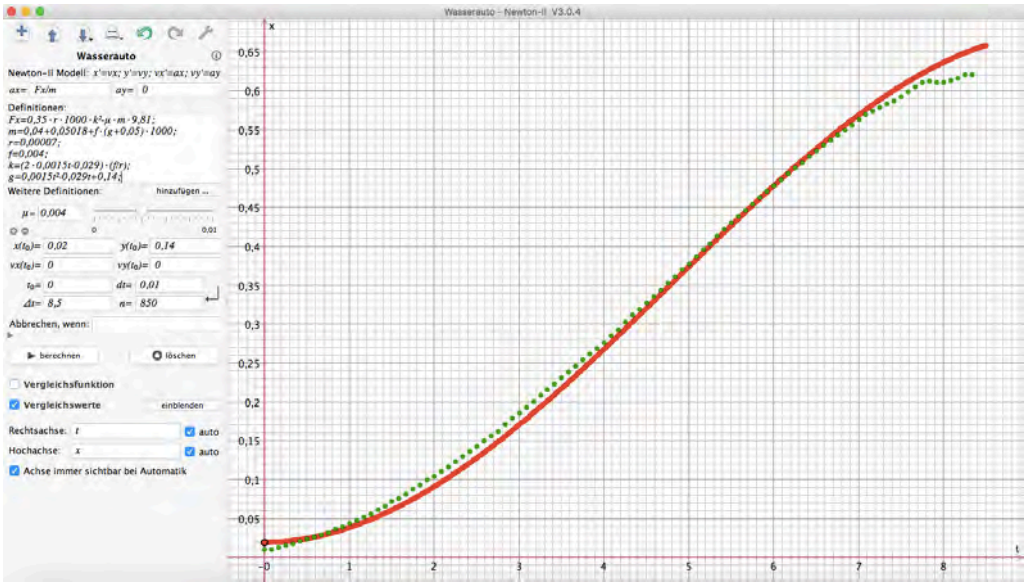


Abbildung 26: Modellierung Wasserauto (Eigene Darstellung)

Der Faktor b steht für die Verluste, die aufgrund der Reibung innerhalb der Flüssigkeit, an den Gefäßwänden etc. entstehen und wies einen optimalen Wert von $b = 0{,}35$ auf.

Außerdem erkennt man in Abbildung 26 die Stelle, an der die Haftreibung das Auto bremst und die mit Rollreibung modellierte Bewegung noch fortläuft.

Die echte Wasserhöhe ließe sich, ungeachtet der Theorie, aber auch als Gerade modellieren. Dann gilt:

$$h(t) = -0{,}0175\frac{m}{s}t + 0{,}14m$$

Und damit:

$$v_{aus} = -\frac{A_{Fl}}{A_r} \cdot 0{,}0175\frac{m}{s}$$

Die so modellierte Gerade kommt der gemessenen Füllstandshöhe zwar etwas näher, allerdings ließ sich damit kein sinnvolles Modellierungsergebnis erzielen, zumal eine gleichbleibende Ausflussgeschwindigkeit einen Widerspruch zur Theorie darstellen würde.

Die Modellierung des Wasserautos stellte sich als besonders schwierig heraus und war sehr instabil, was bedeutet, dass eine kleine Änderung eines der Parameter zu einer großen Änderung der Ergebnisse führt. Auch ist die Anordnung allgemein recht komplex, und das Maß an benötigter Theorie überschreitet die vorigen Versuche, weshalb sich der Versuch nicht unbedingt für die Schule eignet. Darüber hinaus war es zunächst eine gewisse Herausforderung, das Röhrchen in der Flasche so zu positionieren, dass das Auto ausreichend Vortrieb erhielt, um die Haftreibung zu überwinden. Dabei ist

vor allem auf einen großen Querschnitt des Ausflussröhrchens zu achten. Insgesamt sind trotz des theoretischen Aufwandes sowohl bei Wasserstand, als auch bei der Bewegung des Autos immer noch leichte Abweichungen zwischen Modell und Video zu erkennen, womit die Modellierung nicht ganz zufriedenstellend ausgeführt werden konnte. Durch die zu steil verlaufende Modellierung der Wasserhöhe ist auch die Modellierung der Bewegung des Autos etwas zu steil.
Anhand dieser schlüssig aufeinanderfolgenden Bewegungen ähnlicher Art sollte aber eben auch gezeigt werden, wie schnell die Modellierung eines Problems beliebig kompliziert werden kann.
Dennoch ist es meist möglich, ein passendes Modell zu finden, da die Programme auch komplizierte Zusammenhänge problemlos lösen und man durch den Vergleich mit dem analysierten Video der Bewegung stets eine Rückmeldung erhält, wie realistisch das verwendete Modell ist und dieses im Zweifel noch anpassen kann.
Besonders attraktiv ist es hier zudem zu sehen, ob sich die im vorherigen Experiment gefundenen Parameter als sinnvoll herausstellen, weil man diese für die weiteren Versuche benötigt. Ein sich bei gleichem Aufbau stets ändernder Rollreibungskoeffizient wäre beispielsweise nicht sinnvoll zu begründen.

4.2 Zweidimensionale Bewegungen

Als nächstes soll aus den geradlinigen Bewegungen, für die nur die Kräfte in x- oder in y-Richtung relevant waren, eine Bewegung werden, für die man Kräfte in x- und in y-Richtung hat. Dies hat den wichtigen Vorteil, dass anhand dessen verdeutlicht werden kann, dass jede Kraft in unterschiedliche Teile aufgeteilt und der jeweiligen Koordinate zugewiesen werden kann. Dies gilt sowohl für kartesische, als auch für Polarkoordinaten. Allerdings gibt es Komponenten, wie etwa die Luftreibungskraft, die eine strikte Trennung der beiden Koordinaten verhindern, worauf in Kapitel 4.2.1 eingegangen wird.

4.2.1 Katapult

Exemplarisch wird an dieser Stelle ein schiefer Wurf analysiert und modelliert, bei dem eine Kugel durch ein Katapult durch die Luft geschleudert wird und danach frei fliegt (Abb. 27).

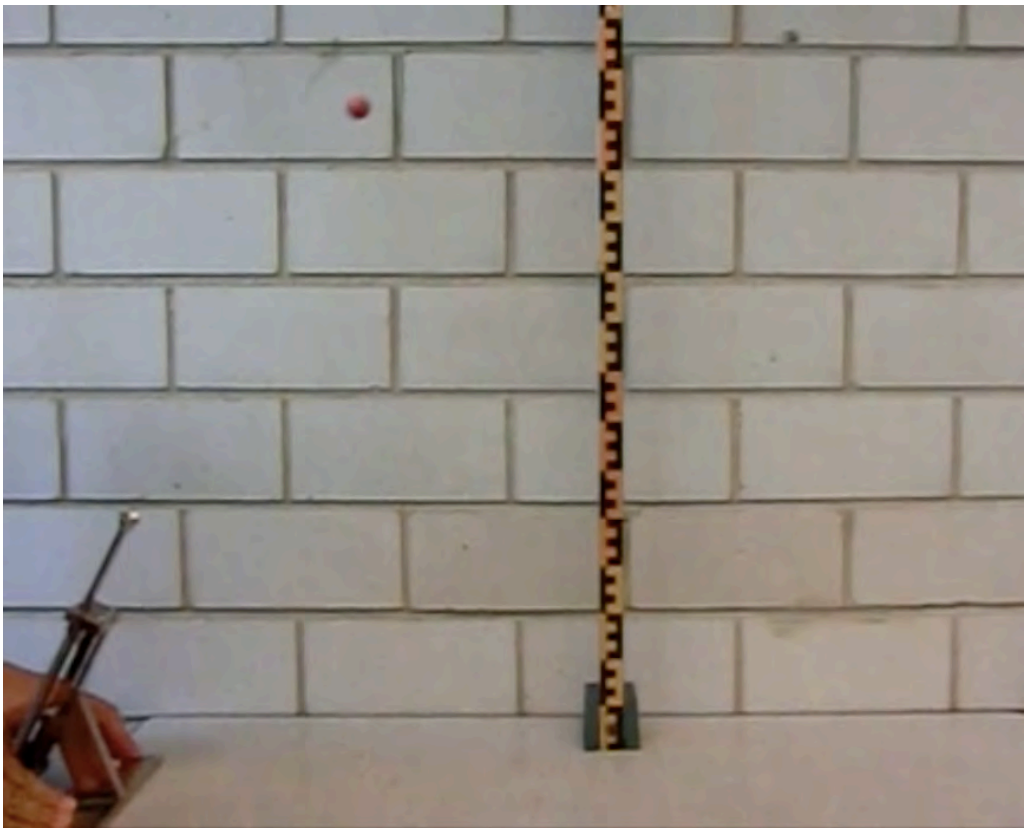


Abbildung 27: Versuchsaufbau Katapult (Eigene Darstellung)

Dieses Video wurde aufgrund der hohen Geschwindigkeiten mit 240 Bildern pro Sekunde gefilmt.

Zunächst bietet es sich wieder an, die Modellierung ohne Luftreibung durchzuführen. Dies würde folgende angreifende Kräfte ergeben:

$$F_x = 0$$

$$F_y = -m \cdot g$$

Bei diesem Versuch werden auch zum ersten Mal die Anfangsgeschwindigkeiten relevant, da der Aufbau bisher immer so war, dass $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$. Nun wird die Kugel aber durch das Katapult auf gewisse Anfangsgeschwindigkeiten beschleunigt. Das Koordinatensystem wurde so gelegt, dass der Auftreffpunkt auf der x-Achse liegt. Zudem wird erst ab dem Zeitpunkt modelliert, ab dem die Kugel frei fliegt und keinen Kontakt mehr zu dem Katapult hat.

Also ist $x(0) = 0m,\ y(t_0) = 0{,}3m,\ v_x(t_0) = 1{,}23\frac{m}{s}$ und $v_y(t_0) = 2{,}89\frac{m}{s}$. Die Anfangsgeschwindigkeiten sind allerdings zum Teil sehr schwer aus der

Tabelle herauszulesen, da die angegebenen Geschwindigkeiten nicht exakt zu dem nebenstehenden Zeitpunkt gehören, sondern immer als Durchschnittsgeschwindigkeiten über eine kurze Zeitspanne zu interpretieren sind, die zudem noch sehr fehlerbehaftet sind. Also müssen durch Ausprobieren für die Modellierung geeignete Werte gefunden werden. Die Anfangskoordinaten hängen wiederum von der Wahl des Koordinatensystems ab.

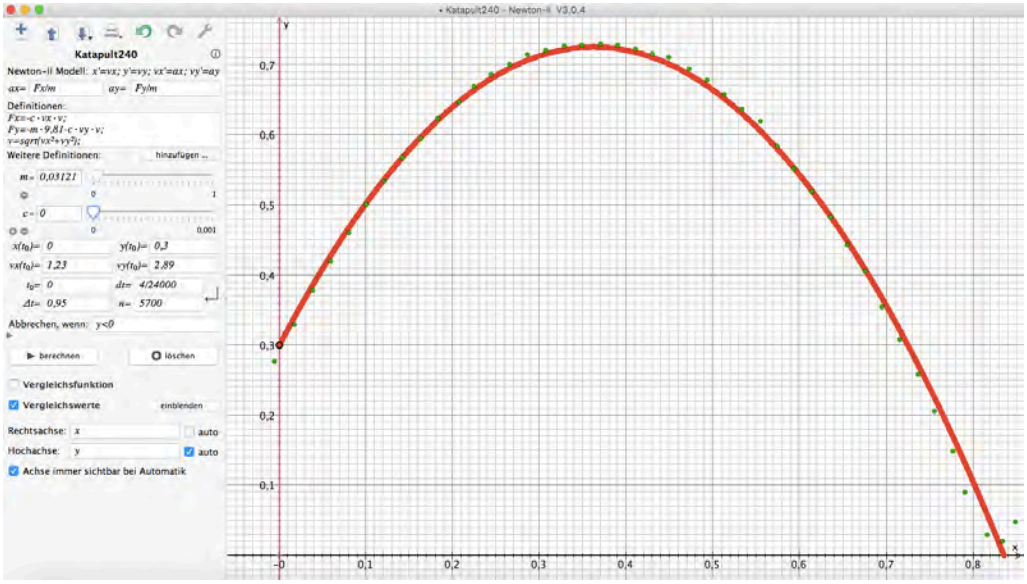


Abbildung 28: Modellierung Katapult ohne Luftreibung (Eigene Darstellung)

Modelliert man aufgrund dieser Daten die Bewegung ohne Luftreibung, erhält man eine gute Näherung (Abb. 28), kann aber nun auch noch die Luftreibung modellieren. Diese wäre hier nicht zwingend nötig gewesen, da sie keinen großen Einfluss auf die Bewegung hat, wird aber dennoch kurz erläutert, da sie auch im folgenden Verlauf benötigt wird.

Die Luftreibung ist abhängig von der Absolutgeschwindigkeit (also dem Tempo). Damit ist $F_L = c \cdot v^2$. Die Geschwindigkeit v erhält man durch geometrische Addition der einzelnen Komponenten, die per Definition von x und y senkrecht aufeinander stehen. Also folgt:

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

Die Luftreibung wirkt abhängig vom Winkel in die beiden Koordinatenrichtungen:

$$F_{L_x} = \cos\alpha \cdot F_L$$

$$F_{L_y} = \sin\alpha \cdot F_L$$

Dabei ist α der Winkel zwischen dem Geschwindigkeitsvektor und der x-Achse und es wird von einer Bewegung im ersten Quadranten ausgegangen, also $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Trigonometrische Beziehungen liefern weiter $\cos\alpha = \frac{v_x}{v}$ und $\sin\alpha = \frac{v_y}{v}$.

Damit ist:

$$F_{L_x} = \frac{v_x}{v} \cdot c \cdot v^2 = c \cdot v_x \cdot \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

$$F_{L_y} = \frac{v_y}{v} \cdot c \cdot v^2 = c \cdot v_y \cdot \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

Also:

$$F_x = -c \cdot v_x \cdot \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

$$F_y = -m \cdot g - c \cdot v_y \cdot \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

Diese beiden Komponenten der Kraft zeigen, dass hier nicht mehr vollständig zwischen x- und y-Richtung getrennt werden kann. Die Bewegung in x-Richtung beeinflusst die Geschwindigkeit in x-Richtung, welche wiederum die Luftreibung auch für die y-Richtung beeinflusst und umgekehrt.

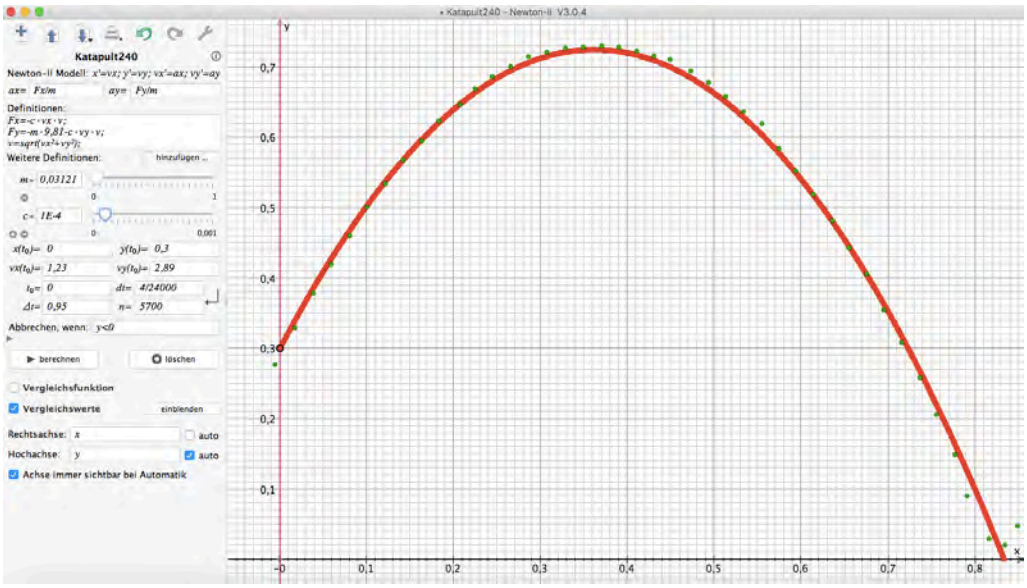


Abbildung 29: Modellierung Katapult mit Luftreibung

Die Modellierung mit Luftreibung, welche in Abbildung 29 dargestellt ist, ist in diesem Fall minimal genauer als die Modellierung ohne Luftreibung. Da es sich hier um die gleiche Kugel wie bei dem freien Fall handelt, liegt dieser nur minimal sichtbare Effekt der Luftreibung an den größeren Geschwindigkeiten und der längeren Flugzeit der Kugel. Noch deutlicher wird der Effekt aber im folgenden Kapitel.

4.2.2 Da Cau

Ähnlich wie vom freien Fall mit geringer Luftreibung zum freien Fall mit großer Luftreibung, soll nun auch auf einen schiefen Wurf mit größerer Luftreibung übergegangen werden. Dies geschieht anhand eines Schusses eines Da Cau-Balles (Abb. 30).



Abbildung 30: Da Cau Ball (Eigene Darstellung)

Da Cau ist ein Sport aus Vietnam, der sich aber auch in anderen Teilen der Welt immer größerer Beliebtheit erfreut. Um die Flugkurve des Spielgeräts analysieren zu können, wurde dieses in einer Sporthalle parallel zu einer dunklen Wand geschossen (Abb. 31).

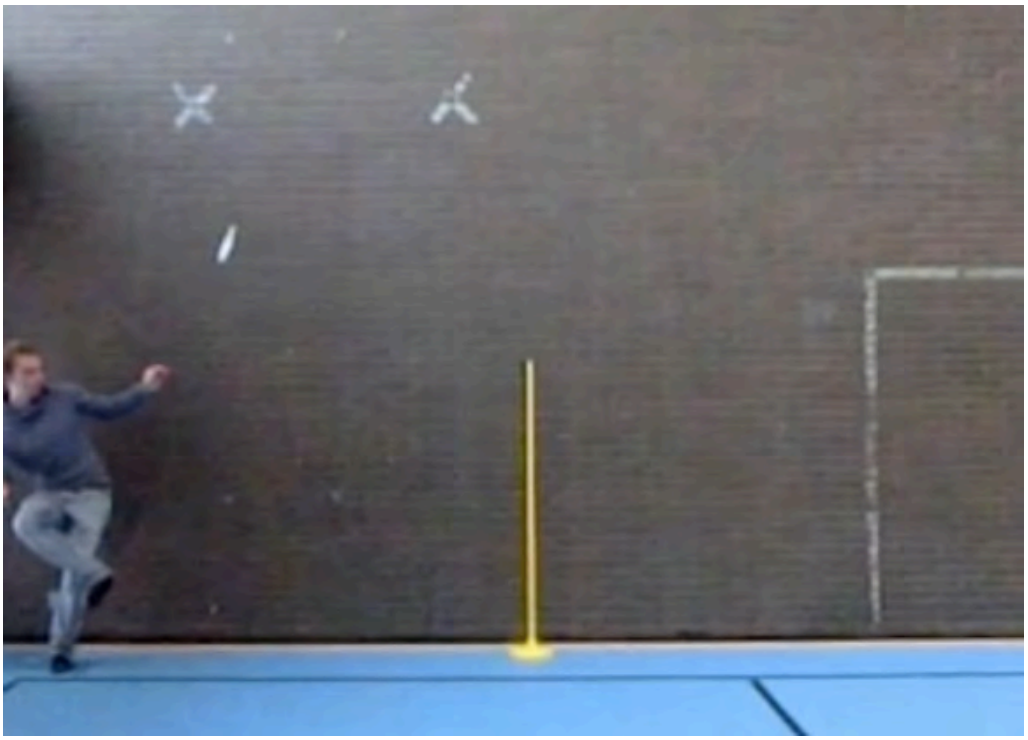


Abbildung 31: Versuchsaufbau Da Cau (Eigene Darstellung)

Ziel ist es, zu sehen und zu beschreiben, wie sehr von der idealisierten Wurfparabel abgewichen wird.

Modelliert wurde wie im Versuch zuvor:

$$F_x = -c \cdot v_x \cdot \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

$$F_y = -m \cdot g - c \cdot v_y \cdot \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

Die Masse des Spielgeräts betrug nun 14,9 g. Der Luftreibungskoeffizient muss noch herausgefunden werden.

Bei einer Modellierung mit $c = 0$, also ohne Luftreibung, ergab sich folgendes Bild:



Abbildung 32: Modellierung Da Cau ohne Luftreibung

Man erkennt in Abbildung 32 eine deutliche Abweichung zwischen Modell und Realität, was die Modellierung der Luftreibung im Gegensatz zum vorigen Versuch unumgänglich macht. Mit $c = 4{,}7 \cdot 10^{-4}\,\frac{kg}{m}$ gelingt die Modellierung optimal und sieht folgendermaßen aus (Abb. 33):



Abbildung 33: Modellierung Da Cau mit Lufteibung

Erneut soll anhand dessen der c_W-Wert des Spielgeräts abgeschätzt werden. Die Querschnittsfläche der am unteren Ende des Spielgeräts befestigten Plättchen ist etwa $A = 0{,}033^2 m^2 \cdot \pi = 0{,}0034 m^2$. Damit ist der c_W-Wert

$$c_W = \frac{2 \cdot 4{,}7 \cdot 10^{-4} \frac{kg}{m}}{0{,}0034 m^2 \cdot 1{,}2 \frac{kg}{m^3}} = 0{,}23.$$

Es sind nach wie vor ein paar Abweichungen zur Realität erkennbar, welche im t-y-Diagramm noch deutlicher sind. Diese ließen sich möglicherweise wieder durch perspektivische Verzerrungen erklären, da die Kamera noch höher hätte stehen können. Aber auch die Tatsache, dass sich das Gerät während des Fluges dreht, hat gewisse Auswirkungen auf den Luftwiderstand und damit auch auf die Flugbahn.

Es wurde hier ein Versuch gewählt, der etwas realitätsnäher ist als die klassischen Versuche unter Laborbedingungen, weswegen auch mit etwas größeren Abweichungen gerechnet werden muss. Dafür kann dieser Versuch einer sein, den Schülerinnen und Schüler selbst durchführen und analysieren.

Generell zeigt sich, dass zweidimensionale Bewegungen aufgrund des zusätzlichen Freiheitsgrades schwieriger zu modellieren sind als eindimensionale.

4.3 Schwingungen

Eine große Gruppe mechanischer Bewegungen stellen die Schwingungen dar, die aufgrund dessen auch in dieser Arbeit nicht fehlen dürfen. Das interessante

ist, dass neben konstant wirkenden Kräften immer ein Anteil in der Kraft hinzukommt, der abhängig von der Position des sich bewegenden Objekts ist. Dies eignet sich also ebenfalls hervorragend für eine Modellierung.
Die Versuche in diesem Kapitel sind ebenfalls nach steigender Komplexität sortiert.

4.3.1 Federpendel

Federpendel werden häufig als klassisches Beispiel einer harmonischen Schwingung genommen. Das liegt an dem linearen Kraftgesetz der Feder, welches bei nicht zu extremer Auslenkung auch ausreichend genau die Realität beschreibt.
Für den Versuch wurde ein Gewicht an eine Spiralfeder gehängt, welche folglich vertikal ausgerichtet war (Abb. 34).

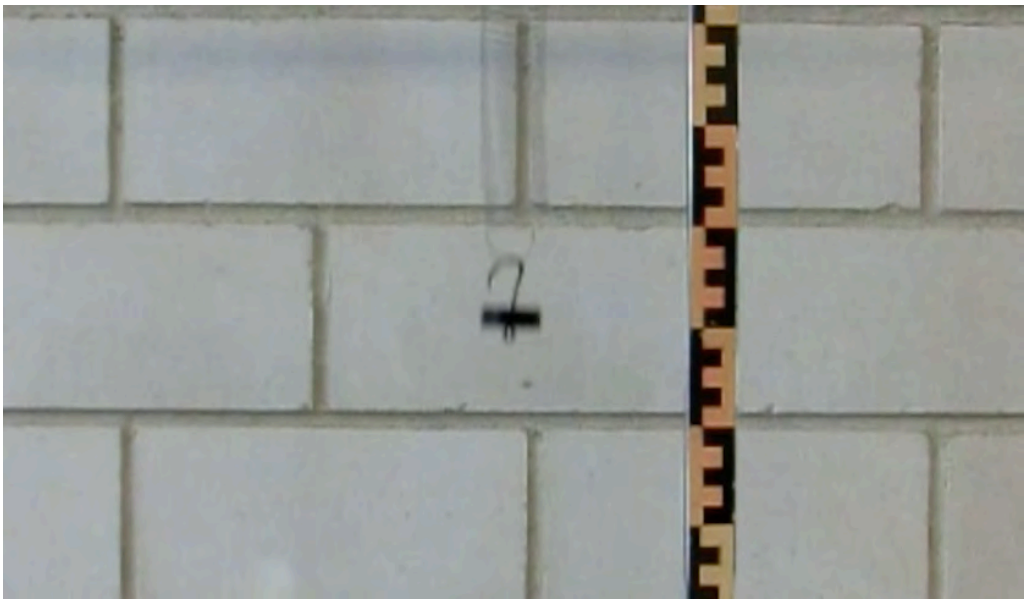


Abbildung 34: Versuchsaufbau Federpendel (Eigene Darstellung)

Auf das Gewicht wirkt nun also zunächst die Gewichtskraft nach unten und die Federkraft nach oben. In Ruhe gleichen sich die beiden Komponenten der Kraft gerade aus, da das Objekt sich nicht bewegt. Wird das Gewicht nun nach unten ausgelenkt, kommt, zu der die Gewichtskraft kompensierenden Komponente der Federkraft, noch eine weitere, längenabhängige, Komponente hinzu. Es muss nur die zweitgenannte Komponente berücksichtigt werden, da sich die andere stets mit der Gewichtskraft neutralisiert und die Masse damit um seine Ruhelage oszilliert.

Es ergibt sich also zunächst folgende Gleichung:

$$F_y = -y \cdot k$$

So kann zunächst auch optimal die Federkonstante bestimmt werden, da die Schwingung mit dieser Modellierung zwar nie abklingt, die Schwingungsdauer aber gut an die Bewegung angepasst werden kann, wodurch man $k = 3{,}83\frac{N}{m}$ erhält. Diese lässt sich auch mit einem experimentell bestimmten Wert vergleichen. Bei der entsprechenden Feder wurden bei Längenänderung von 20 cm etwa 0,7 N benötigt, was eine Federkonstante von $k = \frac{0{,}74N}{0{,}2m} = 3{,}7\frac{N}{m}$ ergibt. Die Abweichung lässt sich am ehesten dadurch erklären, dass der Kraftmesser nicht einwandfrei funktioniert und der Wert nicht eindeutig abzulesen war. Möglich ist auch eine fehlerhafte Modellierung, in jedem Fall liegen die Werte aber noch in einem annehmbaren Bereich.

Bei längerer Betrachtung sieht man aber deutliche Abweichungen von der harmonischen Schwingung, da die Bewegung leicht gedämpft ist. Dazu ist allerdings ein deutlich längeres Video als bei den vorigen Bewegungen nötig. Man kann zunächst einen Ansatz mit einer von der Geschwindigkeit abhängigen Dämpfung wählen, kommt damit aber nicht zu einem optimalen Ergebnis, da die Schwingung so am Anfang zu schwach und am Ende zu stark gedämpft wird. Diese Überlegung führt dazu, einen weiteren Term einzuführen, der abhängig vom Quadrat der Geschwindigkeit ist. Das bedeutet, dass man eine Mischreibung zwischen der inneren Dämpfung der Feder und der Newton'schen Theorie der Luftreibung einführt. Eine optimale Modellierung wie in Abbildung 35 gelingt hier mit

$$F_y = -y \cdot k - d \cdot v_y - c \cdot v_y \cdot |v_y|$$

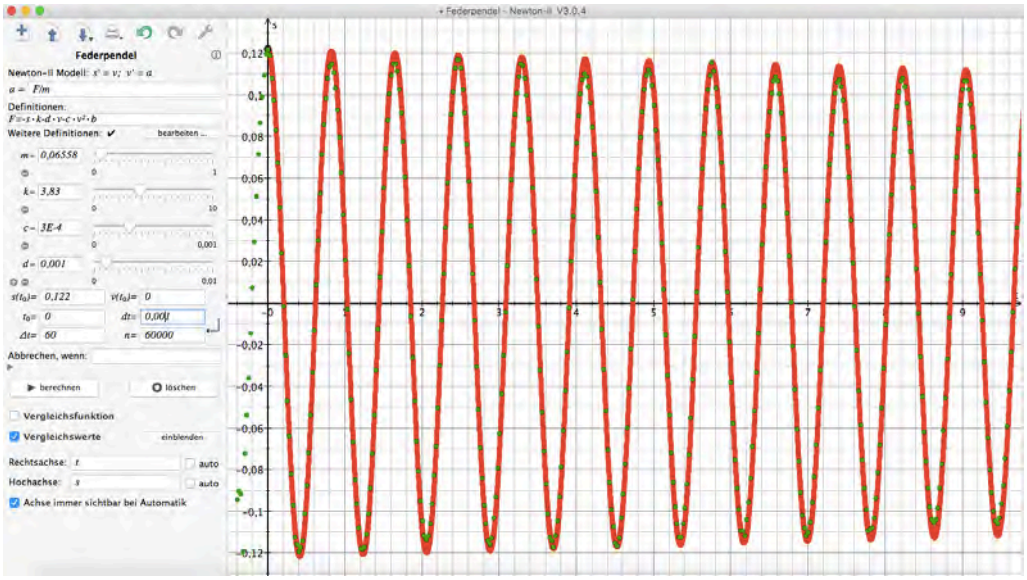


Abbildung 35: Modellierung Federpendel (Eigene Darstellung)

und den Parametern $k = 3{,}83\,\frac{N}{m}$, $d = 0{,}001\,\frac{kg}{s}$ und $c = 0{,}0003\,\frac{kg}{m}$.
Generell ist es aber bei einer solchen Federschwingung ausreichend, die Bewegung ohne Reibung zu beschreiben, wenn man nur die ersten paar Schwingungszyklen betrachtet. Beim Betrachten der gesamten 60 Sekunden, welche hier gefilmt wurden, ergibt sich in den letzten Schwingungszyklen ein größerer Unterschied.
Insgesamt war diese Modellierung sehr gut und einfach durchführbar und eignet sich definitiv für die mathematische Modellbildung in der Schule.

4.3.2 U-Rohr

Ein bisschen anders sieht dies – die Reibung betreffend – bei dem folgenden Pendel aus. Hier wurde ein U-Rohr genommen und mit Wasser gefüllt, welches mit Fluorescein gemischt war, um den Kontrast zu erhöhen. Zudem wurde ein roter Ball in das Wasser gelegt, welcher an der Wasseroberfläche bleibt und den für das Videoanalyseprogramm zu verfolgenden Punkt darstellen sollte. In Ruhe steht das Wasser logischerweise auf beiden Seiten des Rohrs gleich hoch (Abb. 36).

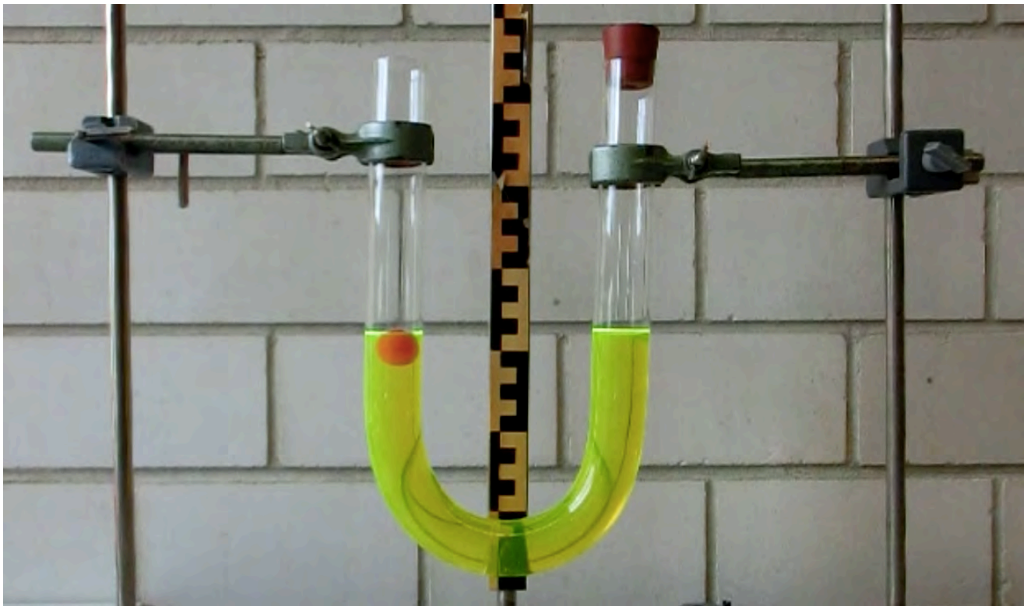


Abbildung 36: Versuchsaufbau U-Rohr (Eigene Darstellung)

Beide Seiten werden mit der gleichen Gewichtskraft nach unten gezogen, was durch die der Komprimierung des Wassers entgegengerichteten Kräfte ausgeglichen wird. Bringt man das System allerdings aus der Ruhelage, steht eine Seite höher als die andere. Hinter dieser Höhendifferenz der beiden Arme steht eine Volumendifferenz und damit auch eine Gewichtsdifferenz. Also ist die

Gewichtskraft, welche an den beiden Armen angreift, nicht mehr gleich groß, und die höhere Seite wird proportional zu diesem Höhenunterschied nach unten beschleunigt. Beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage ist die Höhendifferenz nicht mehr vorhanden, und dadurch greift keine Kraft mehr an. Durch die gewonnene Geschwindigkeit bewegt sich das System aber über die Gleichgewichtslage hinaus, wodurch die Gewichtskraft nun den anderen Arm nach unten zieht – eine Schwingung setzt ein. Aus diesen Überlegungen lassen sich die folgenden wirkenden Kräfte ableiten:

$$F_y = -2 \cdot y \cdot A_{Rohr} \cdot \rho \cdot g$$

Dabei ist $A_{Rohr} = \pi \cdot 0{,}015^2 m^2 = 0{,}0007 m^2$ die Querschnittsfläche des Rohrs, $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$ die Dichte von Wasser und $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$.

Die Reibung ist hier aber deutlich größer als bei dem sich durch die Luft bewegenden Federpendel, und damit muss die Gleichung durch einen größeren Dämpfungsterm ergänzt werden.

Innerhalb des Wassers herrschen unterschiedliche Geschwindigkeiten vor, die durch intermolekulare Wechselwirkungskräfte innere Reibung verursachen. Entscheidend hierfür ist die Viskosität eines Fluids (vgl. OERTEL 2011).

Insgesamt wird von einem Newtonschen Fluid und damit von einer zur Geschwindigkeit proportionalen Reibung ausgegangen:

$$F_y = -2 \cdot y \cdot A_{Rohr} \cdot \rho \cdot g - d \cdot v_y$$

Nach der Modellierung erkennt man nun allerdings, dass die Amplitude zu Beginn der Bewegung geringer ist, als modelliert. Es ist also möglich, dass bei hohen Geschwindigkeiten dennoch ein Reibungsterm hinzukommt, der vom Quadrat der Geschwindigkeit abhängig ist, was durch eine zum Teil turbulente Strömung ausgelöst wird, und sich das Wasser zusätzlich durch die Luft bewegt. Dieser muss hier jedoch relativ klein sein, führt aber dazu, dass die Bewegung optimal angepasst werden kann:

$$F_y = -2 \cdot y \cdot A_{Rohr} \cdot \rho \cdot g - d \cdot v_y - c \cdot {v_y}^2 \cdot b$$

Das b in der Gleichung ist wieder für die Richtung der Reibungskraft zuständig, während man für die Parameter $d = 0{,}16$ und $c = 0{,}03$ findet.

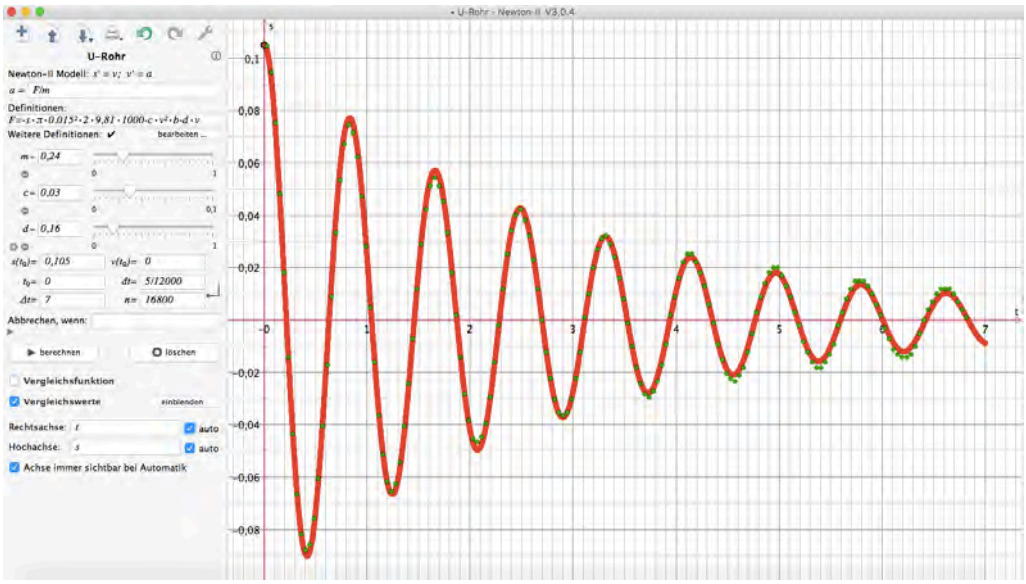


Abbildung 37: Modellierung U-Rohr (Eigene Darstellung)

In Abbildung 37 ist auf den ersten Blick erkennbar, dass die Einhüllende der Schwingung einer e-Funktion entspricht, was man im vorigen Fall noch nicht sehen konnte.

Dieser Versuch stellt eine etwas größere Herausforderung dar, da sich mehr Gedanken um die Physik im Hintergrund gemacht werden muss, was aber für den Verständnisprozess der Schüler durchaus lohnend ist. Die Modellierung gelingt gut und die stärkere Dämpfung macht den Versuch noch interessanter als das Fadenpendel.

4.3.3 Fadenpendel

Die nächste Pendelbewegung wird auch gerne als klassische harmonische Schwingung genommen. Bei guter Aufhängung ist ein Fadenpendel mit großer Masse nahezu als reibungsfrei zu sehen. Zudem muss der zur Aufhängung benutzte Faden deutlich leichter als die schwingende Masse sein. Bei kleinen Auslenkungen kann man ebenfalls die Rückstellkraft proportional zum Auslenkwinkel α, statt zum nicht mehr linearen $\sin\alpha$, setzen, wodurch alle Bedingungen für eine harmonische Schwingung erfüllt sind. Wie realistisch diese Annahmen sind, lässt sich im Folgenden überprüfen.

Dazu wurde ein Fadenpendel mit einer Fadenlänge von 109,1 cm und einem Gewicht des Pendelkörpers von 606,4 g leicht ausgelenkt und die Schwingungen gefilmt. Die Länge bis zum Schwerpunkt des Systems, was unter Vernachlässigung des Gewichtes des Fadens etwa in der Mitte des Pendelkörpers liegt, betrug etwa 112 cm. An den Pendelkörper wurde an dieser

Stelle ein Magnet angebracht, um dem Videoanalyseprogramm einen fixen Punkt für die Analyse zu geben. Mit diesem Magneten wog das Pendel 618,4 g.

Dazu wäre es für die Analyse optimal gewesen, wenn man mit Polarkoordinaten hätte rechnen können, was aber bei der hier primär verwendeten Kombination von *measure Dynamics* und *Newton-II* nicht möglich war. Dazu wurde hier die x- und y- Koordinaten gemessen und über trigonometrische Beziehungen der Winkel bestimmt.

Die erste Modellierung zeigte daraufhin aber leichte Abweichungen von den gemessenen Werten. So war die Periodendauer des Modells zu kurz, was nur durch eine geringere Erdbeschleunigung zu reparieren gewesen wäre. Da dies natürlich keine sinnvolle Lösung war, ergab eine anschließende Fehlersuche, dass sich die Stange, die das Pendel hielt, durch Verbiegung zu sehr mitbewegte, sodass die Periodendauer des Pendels länger war, als dies bei einer perfekt starren Stange gewesen wäre. Daraufhin wurde der Versuchsaufbau etwas abgeändert und erneut gefilmt, was dann auch bessere Resultate lieferte (Abb. 38).

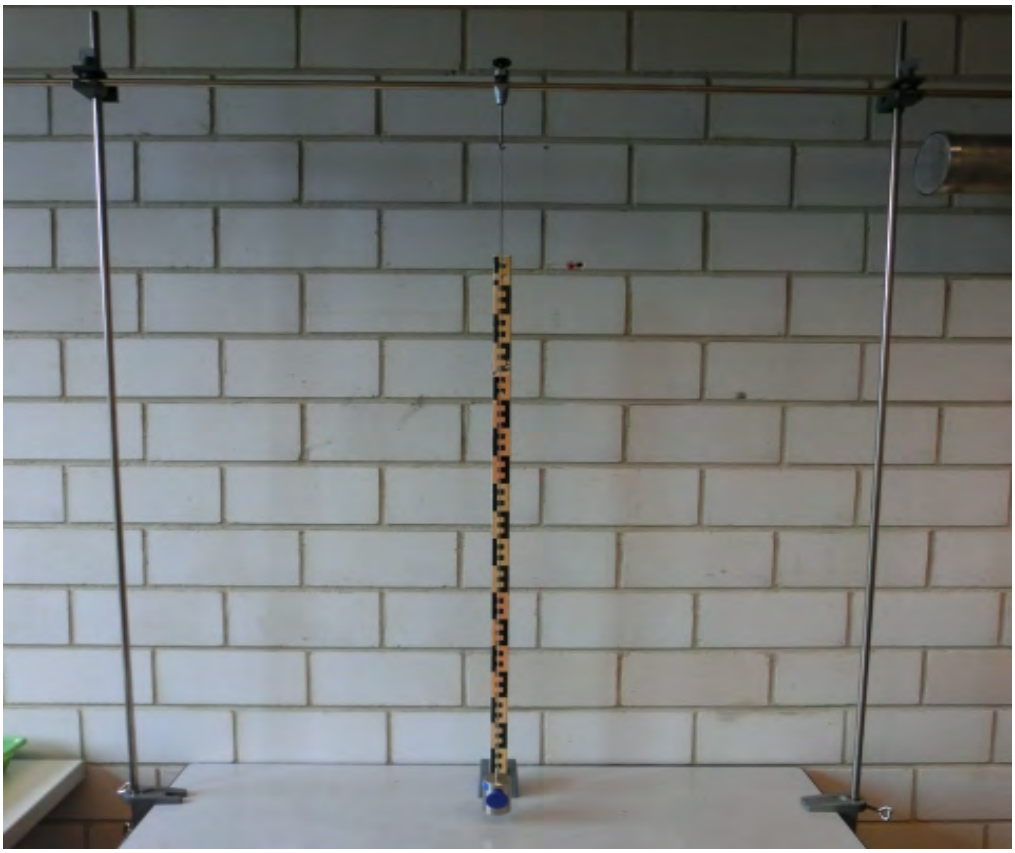


Abbildung 38: Verbesserter Versuchsaufbau Fadenpendel (Eigene Darstellung)

Da die y-Komponente bei der großen Fadenlänge im Vergleich zu den Auslenkungen nur eine geringe Rolle spielt, wurde nur die x-Komponente modelliert. Winkelabhängig sähe die Bewegungsgleichung so aus:

$$F_\alpha = -m \cdot g \cdot \sin\alpha - d_\alpha \cdot \omega - b \cdot c_\alpha \cdot \omega^2$$

Dieser Ansatz hat zunächst den Vorteil, dass die herrschenden Seilkräfte ignoriert werden können. Demensprechend ist $-m * g * \sin\alpha$ der einzig relevante Term für die Rückstellkraft.

Da nur der Kosinusanteil dieser Kraft in x-Richtung wirkt, würde für x daraus:

$$F_x = \cos\alpha\, F_\alpha = \cos\alpha\,(-m \cdot g \cdot \sin\alpha - d_\alpha \cdot \omega - b \cdot c_\alpha \cdot \omega^2)$$

Mit $\cos\alpha = \frac{l-y}{l}$ und $\sin\alpha = \frac{x}{l}$ sah die Modellierung nach Vereinfachung für x dann folgendermaßen aus:

$$F_x = -m \cdot g \cdot \sin\alpha - d \cdot v_x - b \cdot c \cdot {v_x}^2$$

Es gilt außerdem $\omega \propto v$.

Bei der Vereinfachung wurde der Fehler gemacht, dass sich die Geschwindigkeit, von der die Reibung abhängig ist, aus x- und y-Komponente folgendermaßen zusammensetzt $v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2$. Da aber ${v_y}^2 \leq 0{,}018$ wurde diese Komponente bewusst ignoriert. Da auch $y \ll l$ wurde der Kosinusterm vor der Kraft weggelassen. Dies ist eine andere Art, das Problem zu linearisieren. Wenn $\alpha \propto x$ wäre, könnte man das Problem so exakt lösen, da aber $\sin\alpha \propto x$ ist, begeht man einen kleinen Fehler. Das hat den großen Vorteil, dass man dann in *Newton-II* in einer Koordinate modellieren kann. Mit. $d = 0{,}0025$ und $c = 0{,}002$ als Konstanten der entsprechenden Reibung und b als für die Richtung der Reibungskraft verantwortlichen Variable ergab sich folgendes Bild (Abb. 39).

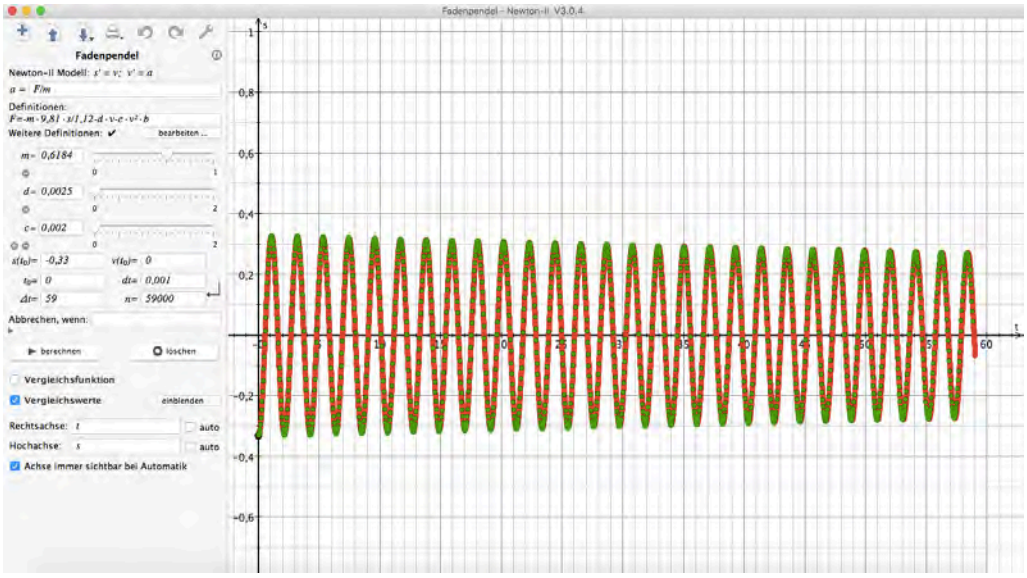


Abbildung 39: Modellierung Fadenpendel (Eigene Darstellung)

Durch die Reduzierung der Schwingung auf die x-Richtung macht man die Schwingung zu einer eindimensionalen und auch zu einer harmonischen Schwingung.

Falls man die Schwingung exakt modellieren möchte, muss man die Analyse entweder in Polarkoordinaten durchführen, was bei *Newton-II* nicht möglich war, oder man muss die y-Komponente ebenfalls modellieren. Dazu sind aber wiederum Kenntnisse über die Seilkräfte nötig. Bei *Tracker* ist es aber möglich, Polarkoordinaten zu verwenden. Dazu muss das Koordinatensystem in den Aufhängepunkt des Pendels gelegt werden, was in diesem Fall außerhalb des Bildes war. Dann konnten die Kräfte in Polarkoordinaten verwendet werden:

$$F_\alpha = -m \cdot g \cdot \sin\alpha - d \cdot \omega - c \cdot \omega^2$$

$$F_r = -m \cdot r \cdot \omega^2$$

Die Radialkraft muss also über die Kreisbewegung definiert werden und ist nicht, wie man denken könnte, Null, da sich Seilkraft und Kosinusanteil der Gewichtskraft immer egalisieren.

Mit diesem Ansatz sind, wie in Abbildung 40 ersichtlich, sehr gute Resultate möglich.

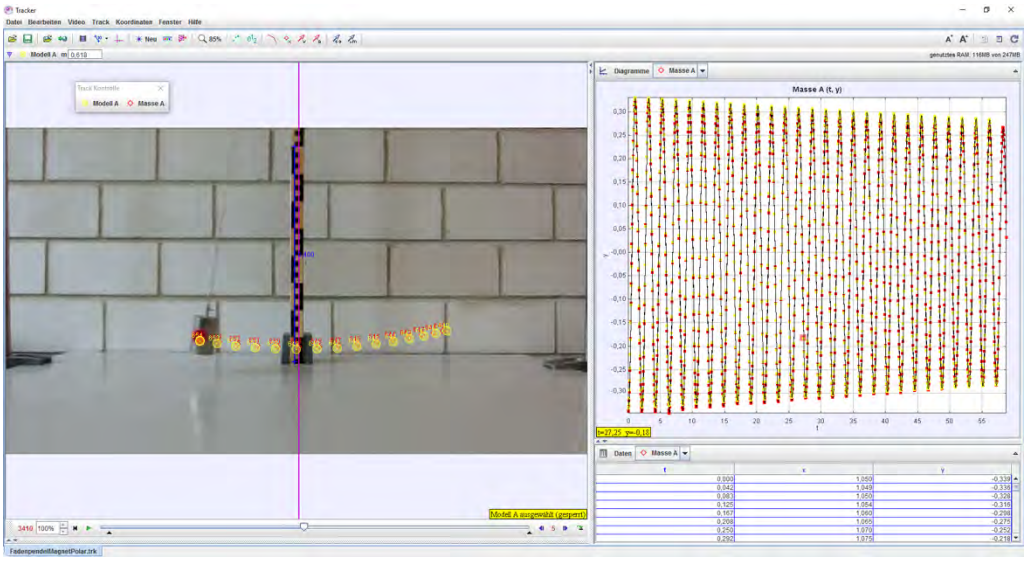


Abbildung 40: Modellierung mit Polarkoordinaten mit Tracker (Eigene Darstellung)

Es wird in diesem Fall die y-Koordinate abgebildet, da das Koordinatensystem um 90° nach rechts gedreht wurde, um den Winkel so definieren zu können, wie dies bei einem Fadenpendel in der Regel gemacht wird.

Allgemein sind Schwingungsprozesse sehr gut für die mathematische Modellbildung geeignet. Die Bewegungen sind nicht zu komplex, und auch Schwingungen mit großer Reibung können modelliert werden. Dies kann auch von Schülerseite erfolgen.

4.4 Stoßprozesse

Stoßprozesse sind im Allgemeinen ein wichtiger Teil der Mechanik, sind jedoch etwas schwieriger zu modellieren als die vergangenen Experimente.
Ein Stoßprozess ist dadurch gekennzeichnet, dass in kurzer Zeit verhältnismäßig viel Energie zwischen den Stoßpartnern ausgetauscht wird, was zu einer großen Impulsänderung führen kann. Der Ansatz über Impuls- und Energieerhaltung bei elastischen Stößen ist bei den vorliegenden Programmen nicht möglich. Besser ist es, das stoßende Objekt als eine Feder mit Federkonstante k aufzufassen, welche beim Aufprall auf den Boden gestaucht wird, wodurch die der Stauchung entgegengesetzte Federkraft zunimmt, die das Objekt schließlich wieder nach oben beschleunigt. In der Regel hat man es hier mit Federn relativ großer Federsteifigkeit, aber auch Dämpfung zu tun, da der Stoßprozess meist mit einigen Verlusten, beispielsweise durch innere Reibung, verbunden ist. Wodurch diese Verluste zustande kommen, ist bei den Versuchen unterschiedlich und soll hier nicht weiter thematisiert werden.
Diese Konzepte sollen nun auf einige Beispiele angewandt werden, um zu untersuchen, ob man so in realistischer Weise Stöße abbilden kann.

4.4.1 Freier Fall mit Stoß

Das erste Experiment in dieser Reihe ist ein freier Fall, bei dem die Kugel auf den Boden aufspringt, um danach wieder hochzuspringen. Dazu wurde dasselbe Video, was bereits für den freien Fall zu Beginn verwendet wurde, genommen, und ein längerer Ausschnitt modelliert. Folgende Kräfte greifen an dem Objekt an:

$$F_y = -m \cdot g + b \cdot \left(k \cdot (0{,}005m - y) - d \cdot v_y\right)$$

Die dominierende Kraft ist erstmal die Gewichtskraft, bis die Kugel auf dem Boden auftrifft. Das Koordinatensystem ist so gelegt, dass die Kugel bei etwa $y = 0{,}005m$ anfängt, den Boden zu berühren. Deshalb ist die Variable b so definiert, dass $b = \begin{cases} 1, wenn\ y < 0{,}005m \\ 0, sonst \end{cases}$.
Die Federkonstante k ist die Steifigkeit der Mauskugel und offensichtlich recht groß, der Dämpfungsterm ist für die Energieverluste während des Stoßes verantwortlich und soll jegliche Verluste von kinetischer Energie abdecken. Wie

oben bereits gezeigt, ist es hier möglich, den Luftwiderstand zunächst zu vernachlässigen.

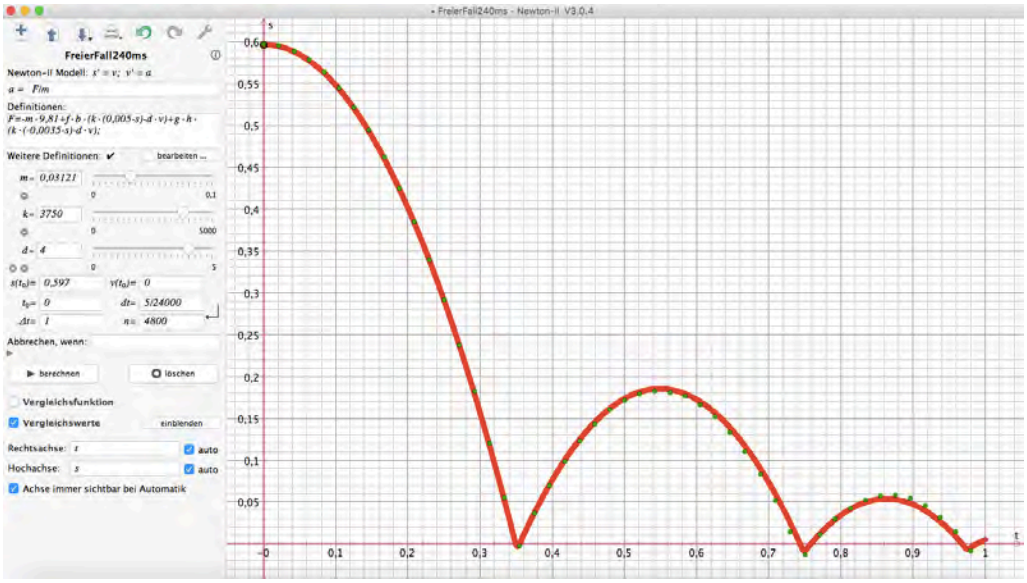


Abbildung 41: Modellierung freier Fall mit Stoß (Eigene Darstellung)

Die Modellierung passt für $k = 3750$ und $d = 4$ optimal (Abb. 41). Dabei sind aber auch andere Kombinationen von k und d möglich. Die Parameter liefern in diesem Fall nicht unbedingt realistische Werte, da es sehr schwierig ist, den exakten Punkt zu erkennen, an dem die Kugel den Boden berührt. Dies ist alleine durch die diskreten Schritte in Form der Einzelbilder des Videos nicht immer möglich. Weiterhin macht es hier durch die hohe Krafteinwirkung über einen sehr kurzen Zeitraum einen großen Unterschied, an wie vielen Punkten das Modellierungsprogramm die Differentialgleichung löst, weshalb es wichtig ist, dass die Zeitdifferenz zwischen zwei Berechnungspunkten klein ($dt < 0{,}001s$) gewählt wird.

Die Modellierung nach dem zweiten Stoß machte die Gleichung noch etwas komplizierter, da die Kugel an einer anderen Stelle aufkam, welche von dem Videoanalyseprogramm als tiefer gemessen wurde. Dadurch muss noch eine zweite Kraft für den zweiten Stoß eingeführt werden, wobei sich hier nur die Wegkomponente änderte, welche mit der Federkonstante multipliziert wird. Die Federkonstante selbst und auch der geschwindigkeitsabhängige Term, welcher für die Energieverluste während des Stoßes verantwortlich ist, bleiben die gleichen.

Aufgrund dessen sah die Eingabe folgendermaßen aus:

$$F_y = -m \cdot g + f \cdot b \cdot \left(k \cdot (0{,}005m - y) - d \cdot v_y\right) + g \cdot h \cdot \left(k \cdot (-0{,}0035m - y) - d \cdot v_y\right)$$

Dieser letzte Teil lässt sich durch ein besseres Video vermeiden, allerdings ist es auch bei einer exakt ausgerichteten Platte schwierig zu realisieren, dass die Kugel auf derselben Stelle noch einmal aufkommt.

4.4.2 Wurfparabel mit Stoß

Eine etwas größere Herausforderung stellt nun eine Bewegung dar, welche von einem schräg nach oben geworfenen Ball beschrieben wird, der auch auf den Boden aufspringt. Hier kommen nun auch Reibungskräfte zwischen Ball und Boden in x-Richtung hinzu, welche den Ball in Rotation versetzen. Außerdem wirkt wieder ein winkelabhängiger Anteil der Luftreibung in x- bzw. y-Richtung. Anhand eines Volleyballs soll überprüft werden, ob diese Bewegung noch realistisch modelliert werden kann.
Wie in Kapitel 4.2.1 hergeleitet, ist die Luftreibung von beiden Komponenten der Geschwindigkeit abhängig.
Damit ist:

$$F_{L_x} = \frac{v_x}{v} \cdot c \cdot v^2 = c \cdot v_x \cdot \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

$$F_{L_y} = \frac{v_y}{v} \cdot c \cdot v^2 = c \cdot v_y \cdot \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$$

Sonst wirken in y-Richtung zunächst die gleichen Kräfte wie im vorigen Versuch. Da der Boden aber beim ersten Aufspringen translatorische Bewegungsenergie des Balls zum Teil in Rotationsenergie umwandelt und diese Rotation bei den folgenden Sprüngen in etwa beibehält, sodass keine weitere Schwerpunktsgeschwindigkeit in Rotation umgewandelt wird, muss der erste Aufprall anders modelliert werden als die darauffolgenden.
Die Bewegungsgleichung in y-Richtung lautet dann:

$$F_y = -m \cdot g - c \cdot v_y \cdot v + f \cdot e \cdot \Big((0{,}18m - y) \cdot k - d \cdot v_y\Big) + (1 - f) \cdot j \cdot \Big((0{,}12m - y) \cdot k - g \cdot v_y\Big)$$

Den letzten Summanden benötigt man nur, wenn man die Stöße unterschiedlich modellieren möchte. Die Parameter e, j und f sind bedingte Variablen, für die gilt, dass $e = \begin{cases} 1, & y < 0{,}18m \\ 0, & sonst \end{cases}$ und $j = \begin{cases} 1, & y < 0{,}12m \\ 0, & sonst \end{cases}$, wohingegen $f = \begin{cases} 1, t < 1{,}5s \\ 0, sonst \end{cases}$. Die Variable e sorgt also für die nur beim Stoß wirkende Federkraft mit der Federkonstante k, während f bewirkt, dass der

erste Stoß anders modelliert werden kann als die folgenden. Die Parameter d und g sind für die Verluste durch den Stoß zuständig. Damit ergibt sich folgendes Bild (Abb. 42):

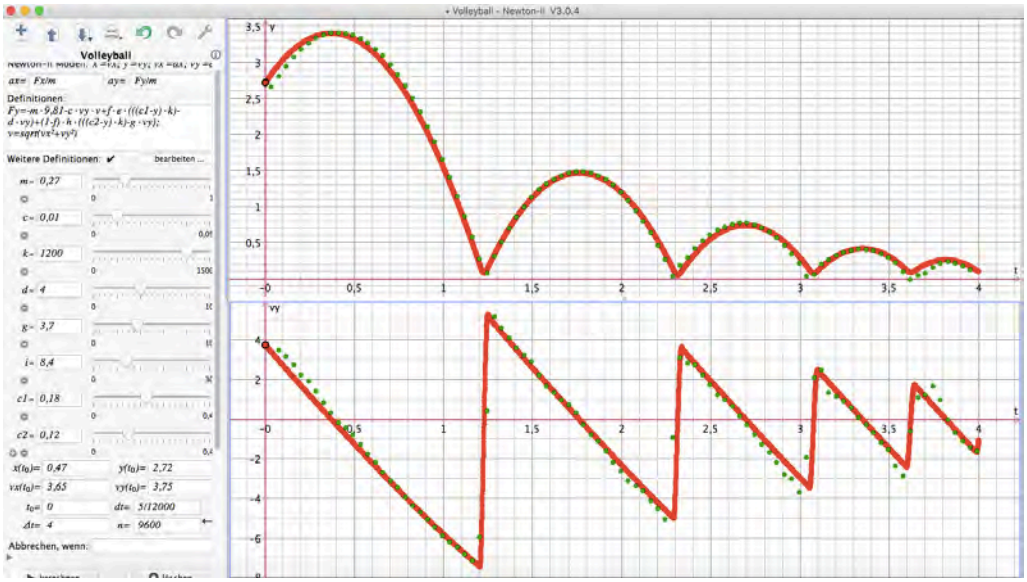


Abbildung 42: Modellierung y-t und vy-t-Diagramm Volleyball (Eigene Darstellung)

Der Volleyball wog 270 g und hatte einen Durchmesser von 21 cm, die sich ergebende Konstante für die Luftreibung ist $c = 0{,}01\frac{kg}{m}$, wodurch gilt:

$$c_W = \frac{2 \cdot 0{,}01\frac{kg}{m}}{\left(\frac{0{,}21}{2}\right)^2 m^2 \cdot \pi \cdot 1{,}2\frac{kg}{m^3}} = 0{,}48$$

Der c_W-Wert einer Kugel ist nach OERTEL et al. (2011) abhängig von der Reynoldszahl, wobei 0,48 in einem durchaus realistischen Bereich liegt.

Weiter erwies sich $k = 1200\frac{N}{m}$, $d = 4\frac{kg}{s}$ und $g = 3{,}7\frac{kg}{s}$ als optimal. F_N lässt sich durch die Geschwindigkeit in y-Richtung abschätzen. Wie oben zu erkennen ist, springt die Geschwindigkeit in y-Richtung innerhalb von knapp 0,1 s von $-7\frac{m}{s}$ auf $+5\frac{m}{s}$. Wenn man eine über diesen Zeitraum konstante Kraft zugrunde legt, was nicht ganz der Fall ist, für die Modellierung aber ausreicht, gilt:

$$F_N = m \cdot \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = 0{,}27kg \cdot \frac{12\frac{m}{s}}{0{,}1s} = 32{,}4N$$

Diese Kraft würde bei einer Federkonstante $k = 1200\frac{N}{m}$ eine Stauchung des Balles von $s = \frac{32{,}4N}{1200\frac{N}{m}} = 0{,}027m = 2{,}7cm$ hervorrufen, was je nach Luftdichte im Ball realistisch erscheint.

Die Rotation des Balles ist auch sehr gut in der x-Koordinate erkennbar, deren Geschwindigkeit beim ersten Aufprall einen Sprung hat und daraufhin, bis auf den kleinen Einfluss des Luftwiderstands, konstant bleibt. Bei den

darauffolgenden Aufprällen gleicht die Rotation des Balles etwa die Schwerpunktsgeschwindigkeit in x-Richtung gerade aus, sodass die Relativgeschwindigkeit zum Boden am unteren Ende des Balles ungefähr Null ist und so die Reibungskraft bei den weiteren Stößen in x-Richtung vernachlässigt werden kann.

Für die Kräfte in x-Richtung ergibt sich also:

$$F_x = -c \cdot v^2 \cdot \frac{v_x}{v} - e \cdot i \cdot f$$

Die Variable i ist hier die Reibungskraft $F_R = \mu \cdot F_N$.

Da für $i = 6{,}3N$ optimal ist, gilt $\mu = \frac{F_R}{F_N} = \frac{8{,}4N}{32{,}4N} = 0{,}26$. Dieser ist möglicherweise zu niedrig, was an den getroffenen Modellannahmen oder einer nicht ganz korrekten Modellierung der Kontaktzeit mit dem Boden liegen kann.

Ort und Geschwindigkeit in x-Richtung ergeben folgendes Bild:

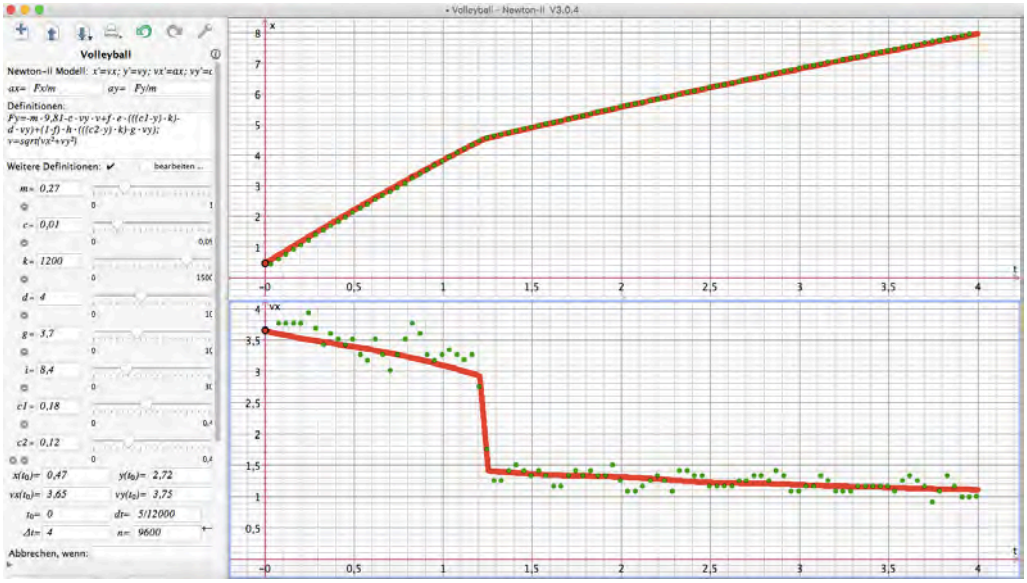


Abbildung 43: Modellierung y-t und vy-t-Diagramm Volleyball (Eigene Darstellung)

In Abbildung 43 ist der Sprung der Geschwindigkeit sehr gut zu erkennen.

Obwohl die Rotation quantitativ nicht exakt zu messen war, ist diese für den Ablauf der Bewegung von großer Bedeutung und kann aufgrund der erhobenen Daten auch untersucht werden. Diese Beschreibung der Rotationsgeschwindigkeit geht natürlich über die normale Modellierung hinaus, soll aber zeigen, dass noch weitere Informationen über die Bewegung abgeschätzt werden können, ohne dass diese genau gemessen werden.

Geht man zunächst idealisiert davon aus, dass der Ball vor dem ersten Aufprall keine Rotation aufweist und während des Stoßes für eine Dauer von 0,1 s eine Kraft von 8,4 N am unteren Ende erfährt, gilt:

$$J \cdot \ddot{\alpha} = M = r \cdot F$$

Also $\ddot{\alpha} = \frac{r \cdot F}{J}$ und damit $\omega(t) = \frac{r \cdot F}{J} \cdot t$ und nach den 0,1 s Krafteinwirkung $\omega(0{,}1s) = \frac{r \cdot F}{J} \cdot 0{,}1s$. Für eine Kugelschale, welche der Ball idealisiert darstellt, gilt nach ROTH und STAHL (2016, S.250) $J = \frac{2}{3} \cdot m \cdot r^2 = \frac{2}{3} \cdot 0{,}27kg \cdot (0{,}105m)^2 = 0{,}002kgm^2$. Also:

$$\omega(0{,}1s) = \frac{0{,}105m \cdot 8{,}4N}{0{,}002kgm^2} \cdot 0{,}1s = 44\frac{rad}{s}$$

Das entspricht $7\frac{1}{s}$, was im Video nicht zu beobachten ist. Logischerweise gibt es auch in x-Richtung einen gewissen Verlust, der durch Umwandlung von kinetischer in Wärmeenergie geschieht. Dadurch sind im Video nur etwa 2,2 Umdrehungen pro Sekunde zu beobachten.

Damit ergibt sich eine Geschwindigkeit von $v = r \cdot \omega = 0{,}105m \cdot 2{,}2\frac{1}{s} \cdot 2\pi = 1{,}45\frac{m}{s}$.

Da die Geschwindigkeit des Schwerpunkts des Balles in x-Richtung nach dem Stoß etwa $1{,}25\frac{m}{s}$ beträgt, ist die Relativgeschwindigkeit der Unterseite des Balles im Bezug zum Boden mit $1{,}25\frac{m}{s} - 1{,}45\frac{m}{s} = -0{,}2\frac{m}{s}$ nun sogar negativ, Da zusätzlich die Normalkraft nur noch etwa halb so groß ist, ist der Effekt der Reibungskraft in x-Richtung bei den weiteren Stößen nicht mehr erkennbar und die Geschwindigkeit in x-Richtung bleibt nach dem ersten Aufprall nahezu konstant.

Im x-y-Diagramm ergab sich schlussendlich folgende Darstellung:

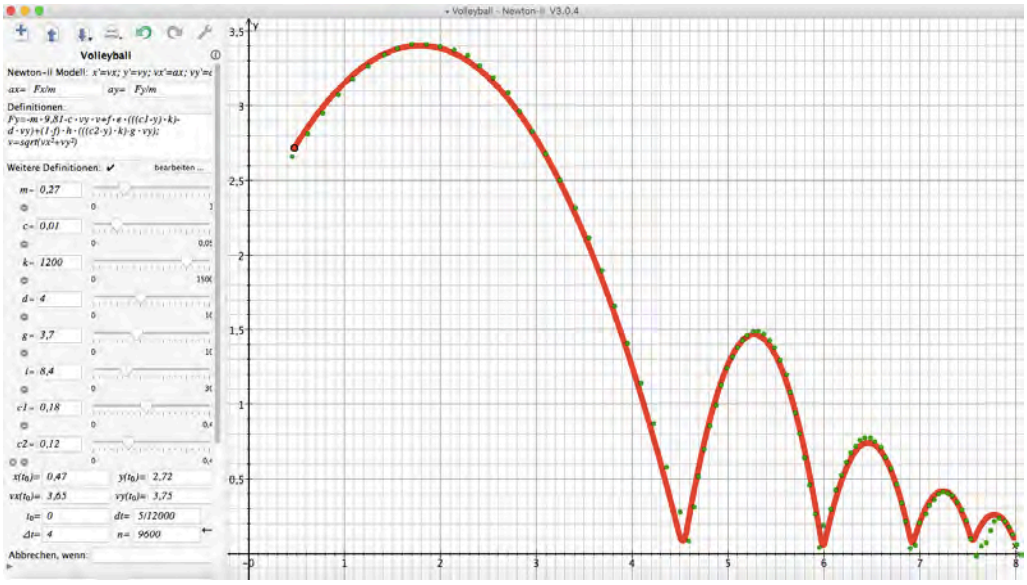


Abbildung 44: Modellierung x-y-Diagramm Volleyball (Eigene Darstellung)

In Abbildung 44 sind doch ein paar Abweichungen erkennbar, die einerseits durch perspektivische Verzerrungen im Video verursacht sind und die behoben

werden könnten, wenn die Kamera noch weiter vom Objekt entfernt positioniert wird. Andererseits war es für die Videoanalyseprogramme auch schwierig, einen festen Punkt auf dem Volleyball zu fixieren, sodass Abweichungen von unter 10 cm, welche in der Modellierung auch maximal vorliegen, durch die Wahl des Messpunktes auf dem Volleyball vorliegen können.
Das Experiment war gleichermaßen interessant, aber auch komplex, was man an den Gleichungen erkennt. Demensprechend ist es im Unterricht wirklich nur als Erweiterung von vorher bereits erfolgreich modellierten Bewegungen zu nutzen. Möglich und zielführend wäre es hier aber durchaus, gemeinsam nach einem Grund zu suchen, warum die x-Komponente einen einmaligen, großen Sprung in der Geschwindigkeit hat.
Insgesamt kann es aber durchaus sinnig sein, zu thematisieren, dass sich Stöße als aufeinandertreffende Federn zufriedenstellend modellieren lassen.

5 Vergleich der genutzten Programme

Die im vorigen Kapitel dargestellten Modellierungen wurden alle – soweit möglich – mit allen Programmen durchgeführt. Aus Gründen der Einheitlichkeit wurden die Resultate bislang nur in *Newton-II* dargestellt, da in diesem Programm alle Modellierungen am einfachsten durchzuführen waren. Dazu wurden ausschließlich Diagramme verglichen, welche auf den ersten Blick die Güte der Modellierung verdeutlichen. In der Schule sollten allerdings noch andere Funktionen der Programme genutzt werden. Aufgrund dessen wird nun der Fokus auf den Vergleich der Programme gelegt, welche anhand verschiedener Kriterien – unter anderem auch der verschiedenen, didaktisch wertvollen Darstellungsmöglichkeiten – bewertet werden sollen, woraufhin eine differenzierte Nutzungsempfehlung erfolgen kann. Dabei werden die Programme *Newton-II* und *measure Dynamics* zusammen bewertet, wobei der Nachteil, dass man bei dieser Kombination zwei verschiedene Programme benötigt, natürlich in die Wertung miteinbezogen wird.
Nach einer ausführlichen Beschreibung der Vor- und Nachteile und der beim Modellieren aufgetretenen Probleme werden die Eigenschaften und Vorzüge der Programme in einer Übersicht in Tabelle 1 dargestellt. Dabei ist zu beachten, dass alle Programm nur bezüglich Videoanalyse, Modellbildung und vor allem deren Kombination beurteilt werden.

5.1 Bedienung

Ein für die Schule besonders wichtiger Punkt ist die Bedienbarkeit und Robustheit eines Programms. Damit ist gemeint, dass die genutzten Programme einerseits intuitiv und ohne größeres Einarbeiten bedienbar sein, da in der Schule in der Regel nicht viel Zeit für die reine Einarbeitung in verschiedene Software vorhanden ist, und auch stabil gegenüber Bedienungsfehlern sein sollten. So sollte es möglich sein, Eingabefehler rückgängig zu machen, um dem Modell oder der Analyse nicht versehentlich unwiderrufliche Schäden zuzuführen. Bereits kleinere Probleme, die in der Handhabung mit dem Programm begründet liegen, können die Motivation von Schülerinnen und Schülern merklich schmälern, weshalb in dieser Kategorie aufgrund ihrer Wichtigkeit fünf Punkte vergeben werden.

5.1.1 *Measure Dynamics* und *Newton-II*

Die Programme *measure Dyamics* und *Newton-II* sind beide leicht und intuitiv zu bedienen. *Measure Dynamics* bietet eine übersichtliche Benutzeroberfläche, die optisch ansprechend gestaltet ist. Alle benötigten Funktionen sind als Schaltflächen ersichtlich, und während der Videoanalyse muss nur innerhalb der Reiter auf der linken Seite von oben nach unten durchgegangen werden. Die Videoanalyse bietet zunächst nur wenig manuelle Einstellungen an, was den Vorteil hat, dass sich zunächst ein einfaches Erscheinungsbild ergibt, da diese zumeist auch gut voreingestellt waren. Es ist aber dennoch möglich, ein paar weitere Einstellungen zu tätigen, falls man sich mit dem Programm bereits besser auskennt und die Videoanalyse noch optimieren möchte.
Nach der Analyse ist das Feld für die Diagramme am größten voreingestellt, was aber auch angepasst werden kann. Diese Konfiguration erweist sich durchaus als sinnvoll, da die Diagramme nur bei ausreichender Größe gut lesbar sind und die erhobenen Daten in der Tabelle meist nur benötigt werden, um einzelne Werte genau nachzulesen oder die Tabelle zu exportieren. Leicht können auch Geschwindigkeitspfeile oder ähnliches eingeblendet werden, worauf hier aber nicht näher eingegangen werden soll.
Nach dem Export der Daten in eine .csv-Datei, kann das Programm *Newton-II* aufgerufen werden, welches als sogenannte „one-window-application“

konzipiert ist. Das heißt, dass die relevanten Funktionen direkt in einem Fenster verfügbar und sichtbar sind.
Die Modellierung erwies sich von allen Programmen am intuitivsten. Jegliche Gleichungen oder Variablen können in dem dafür vorgesehenen Feld definiert und geändert werden. Verschiedene Optionen für Variablen sind genauso schnell erreichbar, wie das Erstellen eines Schiebereglers für beliebige Einflussgrößen. Sonst müssen nur die Anfangsbedingungen festgelegt, die Vergleichswerte eingelesen und das Modell daraufhin berechnet werden. Änderungen können stets, mit Ausnahme des Löschens der Vergleichswerte, rückgängig gemacht werden. Danach können die Daten wiederum als .txt-Datei exportiert werden. Diese dort gespeicherten Daten müssen dann wiederum manuell in *measure Dynamics* eingefügt werden.
Damit kann der einzige Kritikpunkt in der Übertragung der Daten von dem einen in das andere Programm gesehen werden, da dies durch verschiedene Dateiformate zum Teil etwas kompliziert werden kann. Die Kombination dieser beiden Programme erhält hier vier Punkte, wobei der Abzug durch die umständliche Exportierung über Tabellen begründet ist.

5.1.2 Tracker

Tracker kann bei der Bedienung nicht ganz mit den oben beschriebenen Programmen mithalten. Die Vereinigung von Videoanalyse und Modellbildung ist zwar ein Vorteil des Programms, führt aber auch zu einem größeren Funktionsumfang und so zu einem unübersichtlicheren Erscheinungsbild. Optisch ist das Programm nicht unbedingt ansprechend gestaltet, und man muss teilweise suchen, um die entsprechenden Funktionen zu finden. Dies führt zu einer erhöhten Einarbeitungszeit.
Auch die Videoanalyse bietet zunächst deutlich mehr Einstellungsmöglichkeiten an, was zunächst überfordernd wirken kann, allerdings ist dadurch auch eine größere Anpassbarkeit an die eigenen Vorstellungen gegeben. Zudem werden einzelne Funktionen der Videoanalyse direkt erklärt, wenn man mit dem Mauszeiger über der entsprechenden Schaltfläche ist. Die Einstellungen für den Maßstab, das Koordinatensystem und die Bildrate sind schwieriger zu finden als bei *measure Dynamics*. Nach ein bisschen Eingewöhnung sind diese Funktionen aber alle leicht zugänglich und verständlich.

Das Modellieren ist aber weit weniger übersichtlich, als das bei *Newton-II* der Fall ist. So ist alles weniger anpassbar und die Funktionsgleichungen der Kraft werden bei längeren Ausdrücken schnell unübersichtlich, da sie nicht mehr in die dafür vorgesehene Zeile passen. Auch kann es zu Problemen bei der Verwendung von Punkt und Komma kommen, wo das Programm nicht ganz stringent ist. In den Funktionsgleichungen der Kraft muss beispielsweise ein Punkt für die Dezimaltrennung verwendet werden, während in den Anfangsbedingungen oder der Masse ein Komma verlangt ist. Dies kann zu gewisser Frustration führen, da im deutschen Raum das Komma Standard ist, und eine Modellierung möglicherweise nur aus diesem Grund scheitern kann.
Das Einfügen von bedingten Variablen ist etwas komplizierter und muss durch einen *if*-Befehl erfolgen. So könnte man eine der Bewegungsrichtung stets entgegengerichtete Luftreibung als $if(vx < 0, c \cdot vx^2, -c \cdot vx^2)$ modellieren. Diese beschriebenen Unannehmlichkeiten reduzieren die Wertung des Programms in dieser Kategorie.
Dennoch ist es sehr komfortabel, dass das Modell direkt in einer Datei mit der Videoanalyse vorhanden ist und an die *Frames* des Videos angepasst wird. So müssen diese Einstellungen nicht manuell getätigt werden, und es muss nicht exportiert oder importiert werden. Daher werden drei Punkte vergeben.

5.1.3 Coach 6

Die Bedienung von *Coach 6* ist einfach. Nach dem etwas umständlichen Öffnen einer eigenen Videoanalyse bzw. Modellbildung öffnet sich ein übersichtliches Fenster. Bei der Videoanalyse ist jedoch ein Nachteil darin zu sehen, dass das Programm deutlich weniger Dateiformate unterstützt als die beiden anderen, wodurch es nötig sein kann, die vorliegenden Videos mit einem externen Programm zu konvertieren, bevor diese untersucht werden können. Alle wichtigen Einstellungen sind über die rechte Maustaste oder die Icons im oberen Bereich des Programms zu finden. Die automatische Punktverfolgung ist leicht einzustellen und funktioniert gut, bietet jedoch sehr wenig Einstellungen, durch die das Resultat möglicherweise noch verbessert werden könnte.
Die Diagramme erstellen sich nicht von selbst, können aber durch ein paar Klicks hinzugefügt werden.

Obwohl *Coach 6* sowohl die Videoanalyse, als auch die Modellbildung beherrscht, bedarf es in der genutzten Version zwei verschiedenen Programmteilen, um das jeweilig benötigte durchzuführen. Es muss also ein neues Fenster mit Modellbildung geöffnet werden, um die Bewegung zu modellieren, was umständlicher ist als nötig wäre. Der Modellierungsteil ist ähnlich aufgebaut und bedarf daher keiner erneuten Einarbeitung. Sowohl die Daten aus der Videoanalyse, als auch das Video selbst, können einfach importiert werden, woraufhin sich die Modellbildung anschließt.
Die Einarbeitung dauert hier etwas länger als bei einer gleichungsbasierten Modellierung, stärkt aber auch das Verständnis über die Zusammenhänge der Bewegung. Besonders bei mehrdimensionalen Bewegungen wird die graphische Modellierung sehr umständlich und zeitaufwändig, da jede der Kraftkomponenten und damit auch Beschleunigung, Weg und Zeit gesondert modelliert werden muss.
Bei der Modellierung kann prinzipiell alles rückgängig gemacht werden. Das Löschen von Verbindungspfeilen kann jedoch zu Fehlermeldungen oder sogar zum Absturz des Programmes führen, ohne dass die vorigen Änderungen gespeichert wurden. Hier besteht Verbesserungspotential.
Dennoch ist die Bedienung insgesamt einfach und für Schülerinnen und Schüler auch zum eigenen Probieren geeignet. Deshalb erhält das Programm 3,5 Punkte.

5.2 Genauigkeit

Unter dem Gesichtspunkt Genauigkeit sollen die Qualität und Genauigkeit der Videoanalyse und Modellbildung der jeweiligen Programme bewertet werden, da diese entscheidend für ein gutes Resultat sind. Erreichbar sind hier vier Punkte, da die Genauigkeit insgesamt sehr wichtig ist

5.2.1 *Measure Dynamics* und *Newton-II*

Die Videoanalyse von *measure Dynamics* liefert gute Resultate. Die Einstellungsmöglichkeiten reichen in der Regel aus und sind meist gut voreingestellt. Bemängelt werden kann lediglich, dass sich keine veränderbare Schablone einstellen lässt, wie das beispielsweise bei *Tracker* der Fall ist. Auch

lässt sich keine neue Schablone im Laufe der Bewegung festlegen, falls das Programm das Objekt aus den Augen verliert. Nur eine manuelle Ergänzung der automatischen Analyse ist dann möglich. Da die Analyse aber für alle hier untersuchten Videos ausreichend war, ist das Programm dennoch gut zu bewerten.
Die Modellierung von *Newton-II* liefert gute Ergebnisse. Standardmäßig ist das Runge-Kutta-Standard-Verfahren (RK4) eingestellt, wobei man noch die Wahl zwischen Polygonzug nach Euler, Trapezverfahren nach Heun, und Runge-Kutta mit Schrittanpassung hat.
Je nach Bewegung ist eine hohe Anzahl an zu berechnenden Punkten nötig, um eine gewisse Genauigkeit zu gewährleisten, was aber bei den anderen Programmen ebenfalls der Fall ist. Dies ist vor allem bei Stoßprozessen von Nöten, da hier in kurzer Zeit hohe Kräfte wirken. Dementsprechend bietet es sich an, ein Modell sehr kleinschrittig zu überprüfen und die Modellierungspunkte gegebenenfalls noch zu reduzieren. Da hier nichts zu kritisieren ist und nur die Videoanalyse von folgend bewertetem *Tracker* besser ist, erhält die Kombination der beiden Programme 3,5 der vier zu erreichenden Punkte.

5.2.2 Tracker

Die Videoanalyse von *Tracker* ist als sehr gut einzustufen und bietet eine Vielzahl von Einstellungsmöglichkeiten. Die Resultate waren die besten der verwendeten Programme, wobei der Unterschied zu *measure Dynamics* dennoch nicht übermäßig war. Diese gute Qualität und der erhöhte Funktionsumfang der Videoanalyse führen allerdings zu einer Vergrößerung der Laufzeit der Analyse, worauf aber im nächsten Kapitel eingegangen werden soll.
Bei der Modellbildung lässt sich hier wiederum deutlich weniger einstellen. So ist weder das Verfahren, noch die Anzahl der zu berechnenden Punkte wählbar. Genutzt wird aber ebenfalls das RK4-Verfahren (persönliche Korrespondenz mit dem Programmierer D. Brown, siehe Anhang), welches gut geeignet ist. Die erreichte Genauigkeit von *Tracker*, sowohl der Videoanalyse, als auch der Modellbildung, steht der von *measure Dynamics* dennoch in nichts nach und erhält aufgrund der besseren Videoanalyse die vollen vier Punkte.

5.2.3 Coach 6

Coach 6 hat die schlechteste Videoanalyse der drei Programme. Es fehlt an einigen wichtigen Einstellungsmöglichkeiten, und die Software kam auch schneller an ihre Grenzen als die vorigen. Dennoch lassen sich mit Videos unter guten Bedingungen ausreichende und nutzbare Resultate erzielen.
Die Modellbildungsfunktion hat zur Berechnung der Bewegungsgleichung die Verfahren nach Euler, Runge-Kutte-2 und Runge-Kutte-4 (RK4) zur Auswahl. Bei der Wahl von RK4 waren die Resultate entsprechend gleichwertig mit denen von *Newton-II*. Zu kritisieren ist hier aber, dass das Verfahren nach Euler voreingestellt ist, welches nur bei kleinen Zeitschrittweiten befriedigende Resultate liefert und sonst unter Umständen sehr ungenau wird. Nach BARTELS (2016) hat das Euler-Verfahren lediglich eine Konsistenzordnung von $p = 1$, während das klassische Runge-Kutte-Verfahren die Ordnung $p = 4$ besitzt, was bedeutet, dass man, wenn möglich, immer zu dem besseren Runge-Kutte-Verfahren greifen sollte. Falls dem Nutzer nicht bekannt ist, dass die angesprochene Abweichung an der Integrationsmethode liegen könnte, wird möglicherweise das Modell fälschlicherweise als inkorrekt angesehen und abgeändert. Aufgrund der schlechteren Videoanalyse und der Voreinstellung des Euler-Verfahrens erhält *Coach 6* hier drei der vier Punkte.

5.3 Schnelligkeit

Für kurze Videos sicherlich nicht so entscheidend, macht die Schnelligkeit der Videoanalyse und Modellbildung bei längeren Videos, die in der Regel bei Schwingungen benötigt werden, doch einen Unterschied. Da es aber wichtigere Bewertungskriterien gibt, werden hier lediglich zwei Punkte vergeben.

5.3.1 Measure Dynamics und *Newton-II*

Measure Dynamics bietet während der Analyse die Möglichkeit, das Video schneller als in Echtzeit abzuspielen, was zu einer hohen Geschwindigkeit in der Analyse führt. Es ist aber auch möglich, das Video in Echtzeit oder verlangsamt ablaufen zu lassen, falls man die Bewegung während der Videoanalyse genau beobachten möchte.

Newton-II liefert auch mit der Runge-Kutta-Methode, welche rechenaufwändiger ist als das Polygonzugverfahren nach Euler, schnelle Ergebnisse, und eine Verzögerung wird erst ab etwa 10.000 Berechnungen spürbar. Damit gibt es die maximalen zwei Punkte.

5.3.2 Tracker

Wie bereits angedeutet, ist die Videoanalyse bei *Tracker* aufgrund des hohen Rechenaufwands deutlich langsamer, was sich gerade bei Videos über 30 Sekunden deutlich bemerkbar macht und letztendlich auch zum Teil zu Abstürzen des Programms führen kann.
Auch das Modell benötigt gelegentlich mehr Zeit, bis es vollständig berechnet ist, was aber auch daran liegt, dass es direkt in das Video eingeblendet werden muss. *Tracker* erhält einen der beiden Punkte.

5.3.3 Coach 6

In der Schnelligkeit der Videoanalyse ist *Coach 6* zwischen *measure Dynamics* und *Tracker* einzuordnen, da die Analyse hier stets in Echtzeit abläuft und man keine Möglichkeit hat, diese zu beschleunigen. Dennoch ist die Software bei längeren Videos etwas schneller als *Tracker*.
Bei der Modellbildung ist auch hier nichts zu beanstanden. Diese ist zwar etwas langsamer als die von *Newton-II*, führt aber auch bei langen Videos kaum zu Wartezeiten. Folglich werden 1,5 Punkte vergeben.

5.4 Darstellungsmöglichkeiten des Endresultats

Für die Einsatzmöglichkeiten und den didaktischen Gehalt eines Programms sind die Darstellungsmöglichkeiten von großer Bedeutung, da diese in großem Maß die Erkenntnisgewinnung von Schülerinnen und Schülern beeinflussen. In der bisherigen Darstellung des Vergleichs zwischen Modell und Video wurden lediglich reine Diagramme verwendet, da sich der geübte Leser anhand dieser am besten die Güte der Modellierung vor Augen führen kann. In einer Schulklasse sollte aber das Video nach Möglichkeit ebenfalls zu sehen sein und

sich das Modell wie auch die erhobenen Daten der Analyse zeitlich abhängig entwickeln, denn „somit ist die Kluft zwischen der konkreten visuellen Darstellung des Bewegungsablaufs und seiner abstrakten grafischen Darstellung für den Lernenden leichter zu überbrücken“ (WILHELM et al. 2003, S. 3). Aufgrund der hohen Wichtigkeit der Kategorie werden sechs Punkte vergeben.

5.4.1 Measure Dynamics und *Newton-II*

Die beiden für diese Methode genutzten Programme sind nur für jeweils einen Teil der Kombination von Videoanalyse und Modellbildung nutzbar, was es folglich etwas schwieriger macht, das volle didaktische Potenzial der Darstellungsmöglichkeiten abzurufen. Nach der Exportierung der erhobenen Daten durch die Videoanalyse und deren Importieren in *Newton-II* konnte die Modellierung anhand dieser Vorlage durchgeführt werden. Allerdings gibt es in *Newton-II* weder die Möglichkeit, ein Video abzuspielen, noch eine Option der zeitlichen Entwicklung der Modellierung. Es bietet sich also an, die Modelldaten wiederum zu exportieren und in *measure Dynamics* einzufügen. Dies kann zunächst nur als .txt-Datei erfolgen, deren Daten dann manuell in eine Tabelle in *measure Dynamics* eingelesen werden können. Um das Abspielen von Modell und gemessenen Daten synchron zu erhalten, sollte darauf geachtet werden, dass genau so viele (oder ein Vielfaches an) Modellpunkte(n) pro Sekunde berechnet, wie Bilder pro Sekunde vermessen werden. Hier wurde zumeist, wenn möglich, die gleiche Anzahl gewählt, wobei es vorkommt, dass die optimale Startzeit des Modells nicht mit einem *Frame* des Videos übereinstimmt, weshalb die Punkte von Modell und Analyse dann zwar auf einer Kurve liegen und die gleiche Bewegung beschreiben, aber im Diagramm nicht direkt aufeinander, sondern leicht versetzt dargestellt werden. Dies ist beispielsweise der Fall, wenn ein Objekt sich genau zwischen zwei aufgezeichneten *Frames* anfängt zu bewegen, was bei 120 Bildern pro Sekunde zwar lediglich einer maximalen Zeitdifferenz von $\frac{1}{2} \cdot \frac{1s}{120} = 0{,}004s$ entspricht, aber größer wird, wenn von dem Analyseprogramm beispielsweise nur jedes fünfte *Frame* untersucht wird. Diese Zeitdifferenz ist dann durchaus sichtbar.

Ist dieser Aufwand des Imports der Daten getätigt, kann das Modell übersichtlich mit dem Video verglichen werden. Dazu wird lediglich das Video

abgespielt, und auf den gewählten Diagrammen erfolgt eine zeitliche Entwicklung von Modell und Videoanalyse, sodass ein direkter Vergleich möglich ist (Abb. 45).

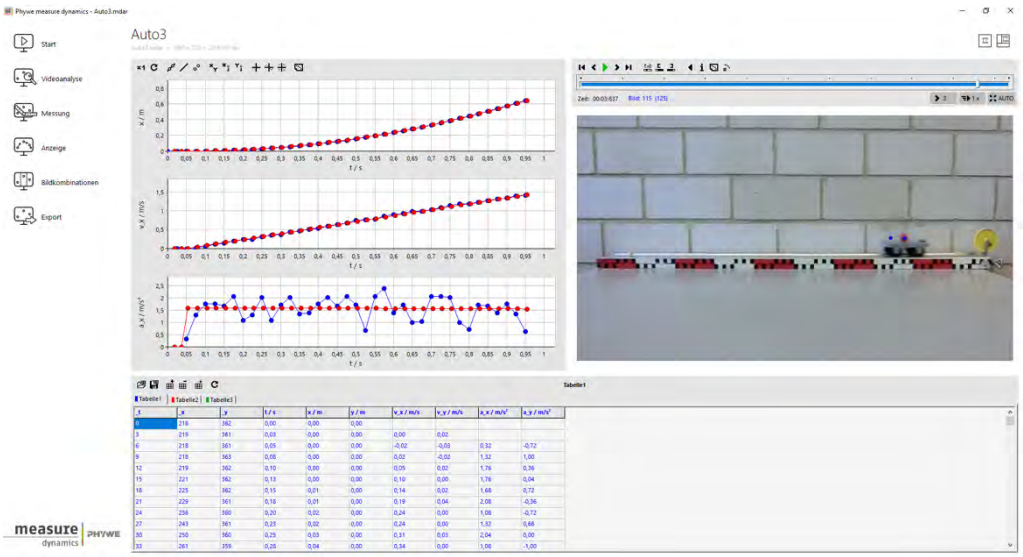


Abbildung 45: Vergleich von Modellierung mit Video in mD (Eigene Darstellung)

Abbildung 45 zeigt das gelungene Endresultat. Zu kritisieren ist hier lediglich der im Vergleich zur „Ein-Programm-Lösung“ erhöhte Aufwand, der betrieben werden muss, und dass das Modell nach dem Import in *measure Dynamics* nicht mehr verändert werden kann. Außerdem wäre es wünschenswert, wenn *Newton-II* zwar viele Punkte berechnen, aber weniger ausgeben könnte, da es bei manchen Modellierungen nötig ist, dass diese sehr kleinschrittig berechnet werden, um nicht ungenau zu werden. Zu viele Punkte behindern aber die Übersichtlichkeit und auch das synchrone Abspielen, da *measure Dynamics* die Punkte nicht nach der verstrichenen Zeit erstellt, sondern nach dem jeweilig zugeordneten Frame erzeugt und anzeigt. Wenn also die Differentialgleichung der Modellierung an mehr Punkten gelöst wird, als das Video Bilder pro Sekunde hat, was bei manchen Bewegungen nötig ist, ist es schwieriger zu realisieren, das Modell synchron zum Video ablaufen zu lassen.

Auch ist es ohne unverhältnismäßigen Rechenaufwand in *Microsoft Excel* nicht möglich, den modellierten Punkt direkt im Video anzeigen zu lassen, da hierzu die reale Position des Objekts wiederum in Pixel des Videos umgerechnet werden müsste und hier der Aufwand nicht in einem angemessenen Verhältnis zum Nutzen steht. Durch diesen Kritikpunkt reduziert sich die Wertung auf vier von sechs Punkten.

5.4.2 *Tracker*

Tracker bietet den großen Vorteil, dass man die gewonnenen Daten weder importieren noch exportieren muss und sich das berechnete Modell automatisch an die *Frames* des Videos anpasst. Entsprechend können die errechneten Punkte direkt und vor allem auch im Video angezeigt werden, wodurch das Modell unmittelbar mit der Realität verglichen werden kann (Abb. 46). Dazu können verschiedene Diagramme erzeugt werden, in denen das Modell mit gemessenen Daten gegenübergestellt werden kann.

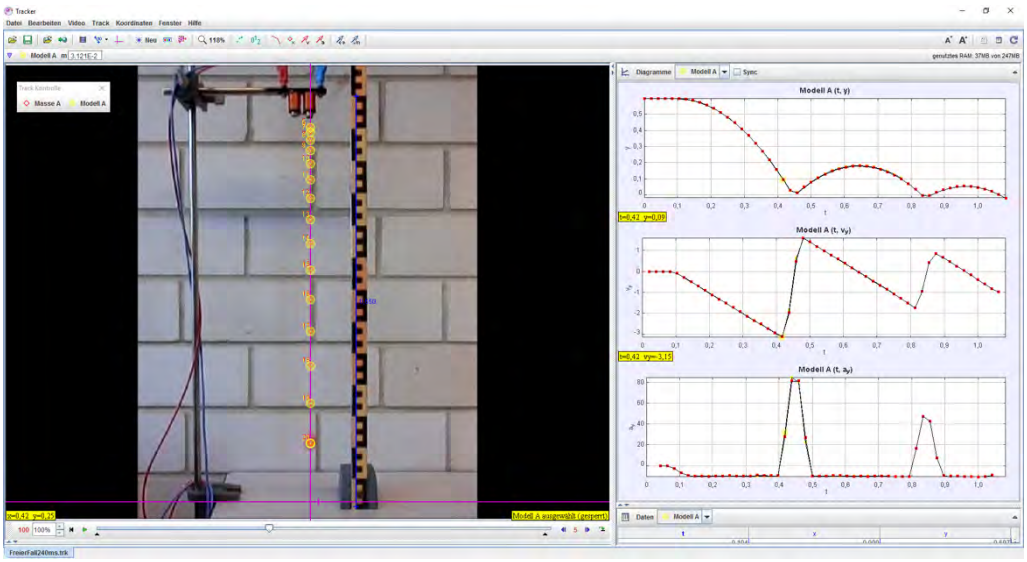


Abbildung 46: Vergleich von Modellierung mit Video in Tracker (Eigene Darstellung)

Die Daten der Modellierung erzeugen sich ebenfalls schrittweise in Abhängigkeit von der Zeit durch einfaches Abspielen des Videos. Dieses Endresultat ist noch über dem von *measure Dynamics* mit *Newton-II* anzusiedeln, da die durch das Modell errechneten Punkte direkt im Video angezeigt werden und außerdem weit weniger Aufwand betrieben werden muss, um zu diesem Resultat zu gelangen. Zudem kann das Modell so noch verändert werden, was sich im Video direkt bemerkbar macht. In *Newton-II* hingegen muss das Modell bereits perfekt angepasst sein, um daraufhin in *measure Dynamics* importiert zu werden. Die berechneten Zeitpunkte der Modellierungen stimmen zudem direkt mit den *Frames* des Videos überein, worauf bei *Newton-II* extra geachtet werden muss. Folglich gibt es hier fast eine perfekte Wertung von 5,5 Punkten.

5.4.3 Coach 6

Coach 6 ist trotz der Tatsache, dass es sowohl Videoanalyse, als auch Modellbildung beherrscht, eher als Zwei-Programm-Lösung zu sehen, da die Daten hier auch exportiert bzw. importiert werden müssen. Das erfolgt allerdings direkt und nicht über den Umweg von .txt- oder .csv-Dateien. In das Modellbildungsprogramm von *Coach 6* können die durch Videoanalyse gemessenen Daten und auch das Video selbst direkt importiert werden, sodass alles auf einen Blick vorhanden ist (Abb. 47).

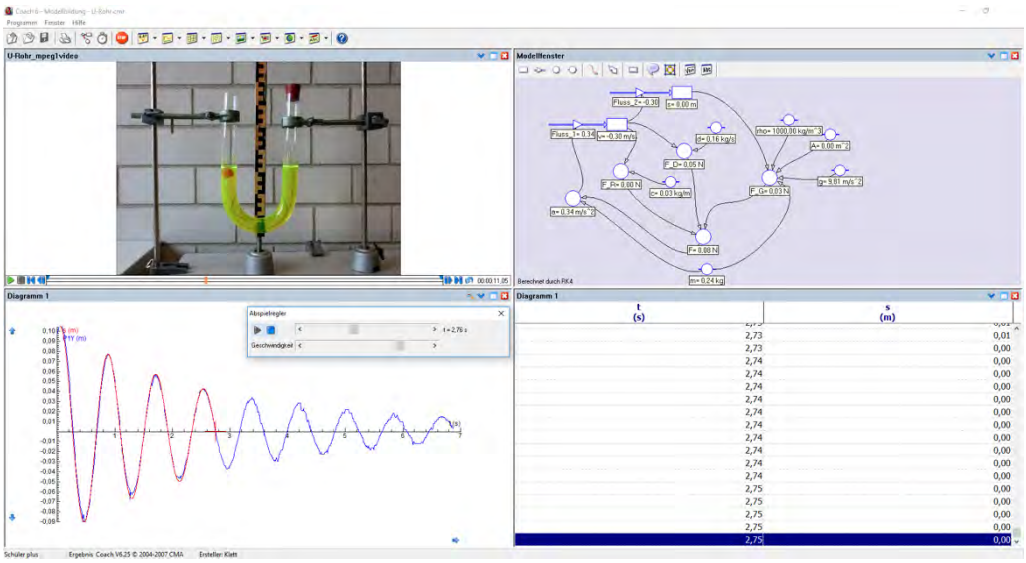


Abbildung 47: Vergleich von Modellierung mit Video in C6 (Eigene Darstellung)

So hat man auch alle wichtigen Größen vor Augen. Auch die verschiedenen Einflussgrößen im Modellierungsfenster geben den aktuell berechneten Wert an und ändern sich dementsprechend mit der Zeit. Weiterhin kann man die Geschwindigkeit des Erzeugens des Modells anhand des sichtbaren Schiebereglers einstellen. Der einzige nicht zu vernachlässigende Nachteil gegenüber den anderen Programmen ist an dieser Stelle, dass das Video zwar angezeigt werden kann, aber nicht an die Erzeugung des Modells gekoppelt ist. Man kann also nicht einfach das Video starten, sodass sich das Modell nach und nach selbst erzeugt. Das Video dient hier lediglich der Veranschaulichung des Experiments und kann nur gesondert abgespielt werden. Auch die Daten der Videoanalyse können nicht in Abhängigkeit der verstrichenen Zeit abgespielt werden, sondern sind lediglich als Hintergrundgraph vorhanden. Dafür bietet sich durch die Grundstruktur der graphischen Modellierung und die ersichtliche Veränderung der Einflussgrößen im Modellierungsfenster ein zusätzlicher Aspekt, der bei den anderen Programmen nicht erkennbar ist. Die

Vor- und Nachteile gegenüber *measure Dynamics* und *Newton-II* gleichen sich aus und somit kommt *Coach 6* auch auf vier von sechs Punkten.

5.5 Einstellungsmöglichkeiten bei Videoanalyse und Modellierung

In dieser Kategorie soll nochmals gesondert auf die Einstellungs- und Definitionsmöglichkeiten in der Videoanalyse und Modellbildung eingegangen werden. Vor allem in der Modellbildung gab es größere Unterschiede, sodass nicht alle Versuche mit allen Programmen modelliert werden konnten, was den Einsatz von mancher Software doch deutlich einschränkt. Aufgrund dieser Limitierung gewisser Software wird die Kategorie mit vier Punkten gewichtet.

5.5.1 *Measure Dynamics* und *Newton-II*

Measure Dynamics ist vom Umfang der Einstellungsmöglichkeiten ausreichend, wenn auch nicht ganz so umfangreich wie *Tracker*. Für alle genutzten Videos waren die Einstellungen aber gut anpassbar und damit befriedigend.
Newton-II bietet die größte Auswahl an Integrationsverfahren für die Berechnung der Bewegungsgleichung, und auch die Definitionsmöglichkeiten von Parametern und bedingten Variablen waren sehr zufriedenstellend. Lediglich ein Ansatz über Energien ist nicht möglich. Auch sogenannte Ereignisse, wie es sie bei *Coach 6* gibt, lassen sich in *Newton-II* nicht einfügen. Dennoch muss die Bewertung für die beiden Programme hier sehr gut ausfallen, da alles Benötigte vorhanden ist und nur die Videoanalyse etwas ausführlicher sein könnte. Demnach gibt es 3,5 Punkte.

5.5.2 Tracker

Die Videoanalyse bei *Tracker* ist hervorragend und noch etwas umfangreicher als die von *measure Dynamics*. Als Beispiel ist hier nochmals die Evolutionsrate der Schablone zu nennen, mit der es möglich ist, dass sich die Vorlage für das im Video gesuchte Objekt je nach Veränderung des Objekts entwickelt, was in der Praxis auch gut funktioniert. Hier ist also nichts auszusetzen.

Die Modellbildung hat aber einen sehr großen Nachteil, der darin besteht, dass die Masse nicht in Abhängigkeit des Weges oder der Zeit modelliert werden kann, wodurch eine Reihe von Modellierungen wegfällt und auch nicht alle hier gefilmten Experimente modelliert werden konnten. Ebenfalls sind die Systemgleichungen nicht anpassbar.
Zudem können bedingte Variablen nur über eine *if*-Bedingung eingefügt werden, und die Anzahl an zu berechnenden Punkten ist genauso wenig auswählbar wie die Integrationsmethode. Hier besteht also noch Verbesserungsbedarf.
Die Möglichkeit, ein Modell über Polarkoordinaten zu erstellen und direkt mit dem Video zu vergleichen, bietet aber auch *Newton-II* nicht und ist damit ein großer Pluspunkt von *Tracker*. Dennoch können hier nur zwei der vier Punkte vergeben werden.

5.5.3 Coach 6

Coach 6 hat von den verwendeten Programmen die schwächste Videoanalyse, zumindest was die Einstellungen angeht. Der Nutzer hat hier kaum Möglichkeiten, die Analyse, beispielsweise durch die Wahl von Muster- oder Farberkennung, zu verbessern, falls die Grundeinstellungen nicht zu befriedigenden Resultaten führen. Brauchbar ist die Videoanalysefunktion dennoch.
Bei der Modellbildung gibt es alle wichtigen Einstellungsmöglichkeiten. Nur eine der Integrationsmethoden fehlt im Vergleich zu *Newton-II*. Dafür gibt es in der Modellierung die Möglichkeit, ein Ereignis einzuführen (Abb. 48). Dies kann beispielsweise dazu dienen, einen Stoß auf eine einfache Art zu modellieren, in dem definiert wird, dass sich der Geschwindigkeitsvektor eines fallenden Objekts bei $s < 0$ umkehrt und um einen gewissen Faktor gestaucht wird.

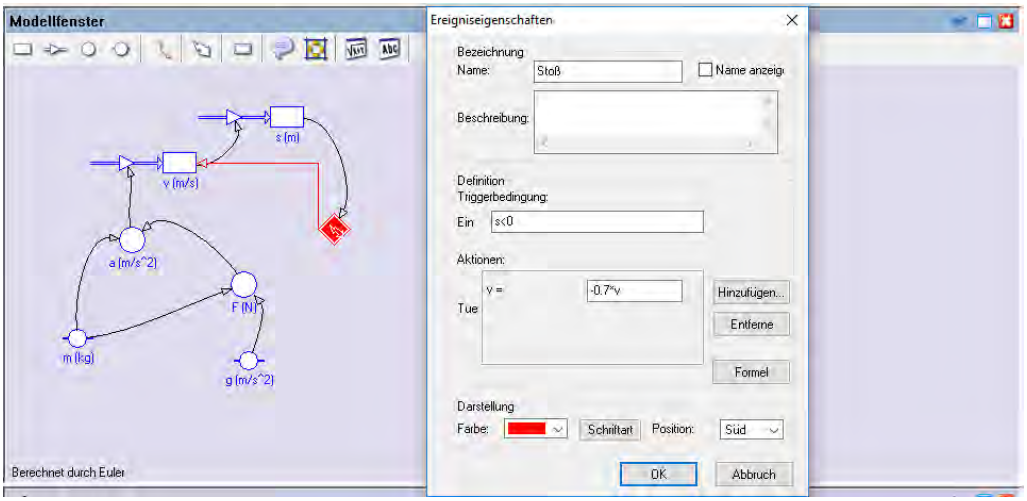


Abbildung 48: Ereignis in Coach 6 (Eigene Darstellung)

Wie in Abbildung 48 zu sehen, liefert diese Einstellung dann mit weniger Modellierungsaufwand ein Bild, wie es bei den untersuchten Stoßprozessen auch aufzufinden war (siehe Abb. 41).

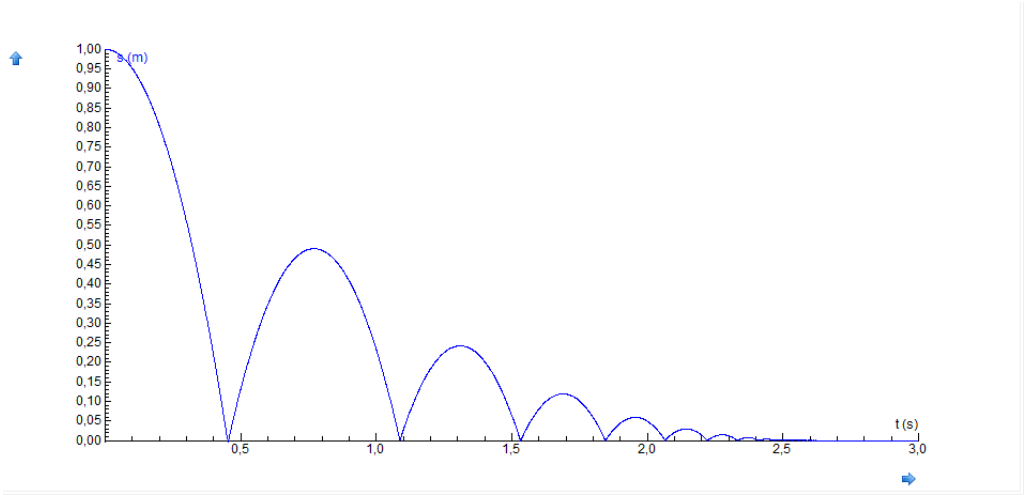


Abbildung 49: Wirkung des Ereignisses in Coach 6 (Eigene Darstellung)

Das vereinfacht die sonst schwierigere Modellierung eines Stoßes und kann somit durchaus hilfreich sein, falls der Charakter eines Stoßes nicht als solcher thematisiert werden soll. Diese Vorteile gleichen die fehlenden Funktionen der Videoanalyse aus und bescheren dem Programm ebenfalls 3,5 Punkte.

5.6 Preis und Verfügbarkeit

Sowohl für den privaten Gebrauch, als auch den Einsatz in der Schule ist der Preis eine entscheidende Kategorie, die die Entscheidung für eine Software beeinflussen kann. Zudem ist es von Vorteil, wenn eine Software für mehrere Betriebssysteme vorhanden ist, wenngleich Windows das Standardsystem in

den Schulen darstellt. Da alle Programme aber für Windows verfügbar sind, ist dies mit zwei möglichen Punkten nicht die wichtigste Kategorie.

5.6.1 *Measure Dynamics* und *Newton-II*

Measure Dynamics wird von der Firma Phywe vertrieben und ist lediglich für Windows verfügbar. Es bedarf einer Nutzungslizenz, die sich Schulen erwerben müssen, während *Newton-II* frei verfügbar für Windows, Mac und Linux ist. Die Mehrfachlizenz für *measure Dynamics* kostet 405 € und ist damit die teuerste der verwendeten Programme. Trotz der guten Verfügbarkeit von *Newton-II* gibt es hier also nur 0,5 von zwei Punkten.

5.6.2 Tracker

Tracker ist ein Open-Source-Projekt und damit kostenlos verfügbar. Außerdem wurde das Programm sowohl für Windows, als auch für Mac und Linux geschrieben. Damit erhält das Programm beide der möglichen zwei Punkte.

5.6.3 Coach 6

Coach 6 wird von der Firma Klett vertrieben und liegt den Schulbüchern der Oberstufe zum Teil bereits bei. Sonst kann der Videoanalyse- und Modellbildungsteil des Programms (*Coach 6* ist in der Komplettversion umfangreicher) für 3,95 € in einer Einzellizenz erworben werden. Diese ist also sehr günstig und möglicherweise durch die Schulbücher ohnehin verfügbar. Dennoch ist das Programm etwas teurer als *Tracker* und für ein Betriebssystem weniger (nur für Windows und Mac) verfügbar. Daher gibt es 1,5 der beiden Punkte.

5.7 Tabellarische Übersicht

Schlussendlich soll für die oben beschriebenen Kategorien eine tabellarische Übersicht gegeben werden, die eine schnelle Meinungsbildung ermöglicht.

Dabei werden die Punkte pro Kategorie zusammengetragen und zusammengezählt. Für eine Begründung für das Zustandekommen der Punkte kann der vorige Abschnitt gelesen werden.

Tabelle 1: Vergleich der Programme

Kategorie	**Erreichbare Punktzahl**	**Erreichte Punktzahl**		
		mD + N-II	*Tracker*	*Coach 6*
Bedienung	5	4	3	3,5
Genauigkeit	4	3,5	4	3
Schnelligkeit	2	2	1	1,5
Darstellungs-möglichkeiten	6	4	5,5	4
Einstellungs-möglichkeiten	4	3,5	2	3,5
Preis, Verfügbarkeit	2	0,5	2	1,5
Resultat	**23**	**17,5**	**17,5**	**17**

5.8 Zusammenfassung

Auch wenn zuvor ein Endresultat in Form einer einzigen Zahl dargestellt wird, muss etwas differenzierter betrachtet werden, für wen welches Programm in welcher Situation am besten geeignet ist, zumal die Endresultate zeigen, dass keines der Programme deutlich überlegen ist und bei allen noch Verbesserungsbedarf besteht. Dies soll nun etwas ausführlicher erläutert und damit die vorangegangenen Kapitel zusammengefasst werden.

Insgesamt sollte zunächst gesagt sein, dass die Anzahl an verschiedenen Programmen in der Schule möglichst gering gehalten werden sollte, damit die Einarbeitungszeit und die technischen Probleme nicht den eigentlichen Nutzen der Software wieder zunichtemachen. Daraus folgt, dass, auch wenn verschiedene Programme für verschiedene Zwecke am besten geeignet sind, nicht ständig das Programm gewechselt werden sollte. Vielmehr sollte Kontinuität ein wichtiger Punkt sein, sodass, wenn möglich, ein oder zwei

Programme herausgesucht werden, die an einer Schule dann eingesetzt werden können.
Zudem ist entscheidend, ob Videoanalyse auch losgelöst von der Modellbildung, und umgekehrt, eingesetzt werden soll oder bereits wurde.
Die intuitivste und stabilste Bedienung lieferten *measure Dynamics* und *Newton-II*. Das einzige, was hier zu bemängeln ist, ist der zusätzliche Aufwand durch das Importieren bzw. Exportieren der Daten über Tabellen. Kann man von diesem Mangel absehen, liegt die Empfehlung bei dieser Kombination, da beide Programme auch hervorragend einzeln eingesetzt werden können. Wünschenswert wäre hier eine Verbesserung der Kompatibilität der beiden Programme, um deren Kombination zu erleichtern. Eine elegante „Ein-Programm-Lösung“ liefert *Tracker*, welches nach einer kleinen Eingewöhnung ebenfalls gut zu bedienen ist und den großen Vorteil hat, dass keinerlei Daten exportiert werden müssen und die modellierten Daten direkt im Video angezeigt werden können. Problematisch ist bei *Tracker*, dass das Programm an manchen Stellen ein Komma und an manchen einen Punkt verlangt, was zu Beginn für Frustration sorgen kann. Wenn aber Modellbildung häufiger mit Videoanalyse kombiniert werden soll und eine erneute Einarbeitung in das Programm wegfällt, da es häufiger genutzt wird, liegt die Nutzungsempfehlung bei *Tracker*. Die erhöhte Laufzeit der Analyse kann dabei verkraftet werden, da meist verhältnismäßig kurze Videos untersucht werden. Die große Einschränkung bleibt dabei die Unveränderlichkeit der Masse. Benötigt man eine weg- oder zeitabhängige Masse, scheidet das Programm aus den möglichen Optionen aus. Dies ist eine Einschränkung, die behoben werden sollte, damit das Programm uneingeschränkt empfohlen werden kann. Wenn aber Bewegungen modelliert werden sollen, die am einfachsten in Polarkoordinaten zu beschreiben sind, überzeugt *Tracker*.
Coach 6 unterscheidet sich in der Art der Modellbildung in geringem Maße von den gleichungsbasierten Programmen zuvor. Zwar besitzt es auch einen Gleichungsmodus, ist aber vor allem auf die graphische Modellbildung ausgerichtet. Wenn der Fokus auf den visuellen Darstellungen der grundlegenden Zusammenhänge einer Bewegung liegen soll, bietet sich *Coach 6* an. Graphische Modellbildung ist vor allem für einfache und eindimensionale Bewegungen geeignet, da das Gefüge sonst sehr schnell sehr kompliziert wird. Bei den einfachen Bewegungen stärkt es aber das Grundverständnis für die Bewegungen und ist nicht ausschließlich auf Gleichungen angewiesen. Ungünstig ist, dass das Programm bei der genutzten Version in zwei Teile

geteilt ist, wodurch ein Export und Import der Dateien nötig ist und das abgespielte Video nicht unmittelbar an die Daten gekoppelt wird. Deshalb ist das Endresultat didaktisch weniger wertvoll als das der anderen beiden Programme.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass *Coach 6* insbesondere für einfache Bewegungen zu empfehlen ist, bei denen der Fokus auf der zugrunde liegenden Struktur der Einflussfaktoren liegen soll und eine visuelle, von den Gleichungen einigermaßen losgelöste, Methode bevorzugt wird.

Falls das Programm häufiger eingesetzt werden soll und sich die Schülerinnen und Schüler an die Bedienung und gewisse Macken gewöhnt haben, bietet sich *Tracker* für alle einfachen bis mittelschweren Probleme, insbesondere auch in Polarkoordinaten, an. Dabei muss beachtet werden, dass nur konstante Massen modellierbar sind.

Falls die Programme auch einzeln für Videoanalyse und Modellbildung eingesetzt werden sollen und die Einarbeitungszeit möglichst gering gehalten werden soll, liegt die Empfehlung bei *measure Dynamics* und *Newton-II*, da diese am angenehmsten zu bedienen und für die jeweilige Anwendung am besten ausgereift sind. Auch schwierigere Gleichungen und damit Modellierungen sind hier übersichtlich darstellbar, und auch die Kombination ist gut möglich. Nur muss hier beachtet werden, dass der Export der Dateien über *Microsoft Excel* und das Einfügen in das jeweils andere Programm einen gewissen Aufwand mit sich bringen und auch zu Problemen führen können. Falls diese Problematik vereinfacht werden könnte, wäre die uneingeschränkte Empfehlung bei letzteren beiden Programmen.

6 Fazit

Im Zuge dieser Arbeit und der damit verbundenen intensiven Beschäftigung mit der Videoanalyse und Modellierung verschiedener Programme ließen sich einige Resultate herausarbeiten. Zunächst konnte gezeigt werden, dass auch schwierigere Bewegungen theoretisch noch gut modellierbar sind, die Gleichungen allerdings schnell kompliziert werden, wenn alle Einflussfaktoren berücksichtigt werden sollen, obwohl der Bewegungsablauf zunächst eine einfache Gestalt haben mag. Darüber hinaus ist dann auch zum Teil Wissen nötig, welches über die Schulphysik hinausgeht. Beispiele wären hier das

Ausflussgesetz oder Seilkräfte, welche in der Umlenkrolle Reibung verursachen. Es bietet sich also auch hier gelegentlich eine gewisse Vereinfachung an, in dem man beispielsweise die Reibung in der Umlenkrolle lediglich über Proportionalitäten in die Gleichungen einfließen lässt. Dies hat zwar den Nachteil, dass dann keine Aussage mehr über den Wirkungsgrad der Umlenkrolle getroffen werden kann, reduziert die Komplexität der Modellierung aber um einiges und legt den Fokus auf das Wesentliche. Die grundlegende Struktur, wo überall Reibung auftritt und wie diese die Bewegung beeinflusst, sollte nämlich unbedingt thematisiert werden, da sonst eine Simplifizierung vorgenommen werden würde, welche durch die Modellbildung ja gerade vermieden werden sollte.

Insgesamt können Bewegungen durch mathematische Modellbildung und Videoanalyse deutlich umfassender beschrieben und analysiert werden, als dies ohne den Einsatz von Computern möglich wäre. Die Programme nehmen den Lernenden alle Berechnungen ab und liefern in Form der durch die Videoanalyse erstellten Diagramme gleichzeitig eine Vorlage, wie das Modell am Ende auszusehen hat. Durch diese Vorzüge können Schülerinnen und Schüler selbst erforschen, warum sich ein Objekt auf eine gewisse Art und Weise bewegt. Zu Empfehlen ist hier, zunächst bei den einfacheren von den dargestellten Bewegungen zu bleiben.

Falsche Annahmen in der Modellierung werden durch die umgehende Berechnung des Modells offengelegt und können revidiert und verbessert werden. Diese Rückmeldung ist allerdings nur gegeben, wenn das Modell mit einer realen Bewegung verglichen werden kann, was nur durch die Kombination von Videoanalyse mit Modellbildung möglich ist. Die Erkenntnisgewinnung ist damit intensiver einzuschätzen, als dies bei einer Behandlung der Problematik ohne Computereinsatz wäre. Dabei ist es aber insgesamt wichtig, dass die Wahl der Parameter und Einflussgrößen stets auf ihre Plausibilität überprüft werden, wo dies möglich ist. Denn eine Bewegung, vor allem eine der komplexeren, lässt sich unter Umständen mit verschiedenen Kombinationen von Parametern modellieren, wobei die Realität nur einer konkreten Version entspricht. Aufgrund dessen wurde in der Arbeit stets versucht, die gefundenen Einflussgrößen mit Literaturwerten oder Messungen zu vergleichen, um einschätzen zu können, ob die zugrunde liegenden Kräfte wirklich den modellierten entsprechen.

Es wurde gezeigt, dass manche Bewegungen besser geeignet sind als andere, und die Lehrkraft sich im Vorhinein darüber bewusst sein sollte, wie komplex es

ist, eine Bewegung ausreichend genau nachzumodellieren. Beispielsweise ist das über das Rückstoßprinzip erklärbare Wasserauto in dieser Form nicht unbedingt für die Schule geeignet, während sich Würfe oder Schwingungen hingegen besonders anbieten.

Dabei ist aber bereits bei den Videos auf einiges zu achten, und deren Qualität beeinflusst den gesamten Prozess der nachfolgenden Modellierung und den daraus folgenden Erkenntnisgewinn. Ergibt sich bei einem einfachen Versuch durch ein ungünstig aufgenommenes Video beispielsweise eine von der Realität abweichende Erdbeschleunigung als optimaler Wert, kann ebenfalls eine gefühlte Diskrepanz zwischen Realität und Theorie entstehen, welche durch den Einsatz dieser Technik ja gerade beseitigt werden sollte. Dementsprechend sollten perspektivische Verzerrungen, die zu diesem Problem führen können, möglichst gering gehalten werden.

Insgesamt muss aber immer ein Kompromiss zwischen Einfachheit der Modellierung und Realitätsnähe der Bewegung eingegangen werden. Analysiert und modelliert man nur Bewegungen, bei denen versucht wird, die Fülle an Einflussfaktoren möglichst gering zu halten, um eine erfolgreiche Modellierung zu erleichtern, kann nach wie vor das Gefühl entstehen, eine Bewegung könne nur bei Laborbedingungen ausreichend genau beschrieben werden. Der Anspruch, der erreicht werden soll, ist aber der, dass Schülerinnen und Schüler erkennen, dass jegliche Bewegungen aus ihrer Lebenswelt mit der Newton'schen Mechanik ausreichend genau beschreibbar sind.

Wählt man hingegen eine komplexere Bewegung, oder lässt dies die Schülerinnen und Schüler tun, kann die Modellierung trotz guter Programme so schwer werden, dass eine nicht gelungene Anpassung des Modells zu Frust führt und wieder der Eindruck entsteht, dass es mit der in der Schule gelehrten Physik nicht möglich wäre, die Realität zu beschreiben. Dementsprechend ist es sehr von der Umsetzung durch die Lehrkraft abhängig, ob die Kombination von Videoanalyse und Modellbildung den gewünschten Lernfortschritt erzielt oder möglicherweise sogar neue Probleme schafft. Die richtige Anleitung der Lerngruppe durch die Lehrkraft während des Modellierens ist hier entscheidend.

Es konnte außerdem gezeigt werden, dass alle verwendeten Programme ihren Zweck erfüllen, aber auch gewissen Limitierungen unterliegen und noch optimiert werden könnten. So ist die Kombination von *measure Dynamics* mit *Newton-II* am einfachsten zu bedienen und damit für den Nutzer schnell zugänglich. Nachteilig ist, dass hier aber ein gewisses Verständnis vorhanden

sein muss, um die Daten von einem Programm in das andere und wieder zurück zu importieren. Hier hat *Tracker* den großen Vorteil, alles in einem Programm zu vereinen, ist dafür aber unübersichtlicher und bietet beispielsweise keine direkte Möglichkeit, eine variable Masse zu modellieren. Weiterhin wurde mit *Coach 6* ein graphisches Modellbildungsprogramm besprochen, welches durch den visuellen Charakter Vorteile gegenüber den anderen Programmen hat, dadurch allerdings auch schneller unübersichtlich wird.

Aufgrund der hier herausgearbeiteten Resultate sollte eine gewisse Motivation erzeugt werden, dass jetzige und zukünftige Physik-Lehrkräfte die Möglichkeiten der Videoanalyse- und Modellbildungssoftware im Unterricht häufiger nutzen, um für die Lerngruppe den beschriebenen Mehrwert zu erreichen, sich aber auch über die möglicherweise auftretenden Schwierigkeiten im Klaren sind. Es wurden Anregungen für Versuche gegeben, die im Unterricht besprochen werden können, und dazu aufgerufen, dass Lehrkräfte mit ihrer Lerngruppe eigene Bewegungen auswählen, die für die Schülerinnen und Schüler relevant sind und analysiert werden sollen. Die hier vorgestellten Versuche sollten zunächst einen Überblick darüber schaffen, welche Abläufe modelliert werden können. Eine Umsetzung der Kombination von Videoanalyse mit mathematischer Modellbildung kann aber beispielsweise auch ein fächerübergreifendes Projekt mit dem Fach Sport sein, in dem es eine Vielzahl an interessanten Bewegungen gibt, die untersucht werden können.

Quellenverzeichnis

BARTELS, S. (2016). Numerik 3x9. Drei Themengebiete in jeweils neun kurzen Kapiteln. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

BETHGE, T. & SCHECKER, H. (1990). Software-Werkzeuge zur Modellbildung im Physikunterricht, Konzepte und Erfahrungen, Bremen: Institut für Didaktik der Physik, Bremen.

BÖGE, A. (2006). Formeln und Tabellen zur technischen Mechanik. Vieweg & Sohn Verlag, 20. Auflage, Wiesbaden.

GIANCOLI, D. (2006). Physik. Pearson-Studium, 3. Auflage, München.

Hessisches Kultusministerium (2017a). Bildungsstandards und Inhaltsfelder. Das neue Kerncurriculum für Hessen. Sekundarstufe 1 – Gymnasium. URL: https://kultusministerium.hessen.de/sites/default/files/media/kerncurriculum_physik_gymnasium.pdf (Stand: 15.03.17)

Hessisches Kultusministerium (2017b). Bildungsstandards und Inhaltsfelder. Das neue Kerncurriculum für Hessen. Sekundarstufe 1 – Gymnasium. URL: https://kultusministerium.hessen.de/sites/default/files/media/kcgo-ph.pdf (Stand: 15.03.17)

KURZWEIL, P., FRENZEL, B. & GEBHARD, F. (2008). Physik Formelsammlung. Für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Vieweg & Sohn, Wiesbaden.

LÜCK, S. & WILHELM, T. (2011). Modellierung physikalischer Vorgänge am Computer. Modellbildungssysteme als Unterstützung zum Verständnis physikalischer Strukturen, Unterricht Physik 22, Heft 122, 2011, S. 26 – 31

OERTEL, H., BÖHLE, M. & REVIOL, T. (2011). Strömungsmechanik. Grundlagen – Grundgleichungen – Lösungsmethoden – Softwarebeispiele. Vieweg + Teubner, 6. Auflage, Wiesbaden.

ROTH, S. & STAHL, A. (2016). Mechanik und Wärmelehre. Experimentalphysik – anschaulich erklärt. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

SPURK, J. & AKSEL, N. (2010). Strömungslehre. Einführung in die Theorie der Strömungen. Springer-Verlag, 8. Auflage, Berlin Heidelberg.

SULEDER, M. (2010). Videoanalyse und Physikunterricht. Technik – Didaktik – Unterrichtspraxis. Aulis Verlag.

SULEDER, M., WILHELM, T. & HEUER, D. (2004). Neue Möglichkeiten durch Kombination von Videoanalyse und Modellbildung. In: Nordmeier, V., Oberländer, A. (Red.): Didaktik der Physik. Beiträge zur Frühjahrstagung Düsseldorf 2004, Lehmanns Media – LOB.de, Berlin.

WILHELM, T. (2005). Konzeption und Evaluation eines Kinematik/Dynamik-Lehrgangs zur Veränderung von Schülervorstellungen mit Hilfe dynamisch ikonischer Repräsentationen und graphischer Modellbildung Studien zum Physik- und Chemielernen, Band 46, Logos-Verlag, Berlin.

WILHELM, T., GEßNER, T., SULEDER, M. & HEUER, D. (2003). Sportaktivitäten vielseitig analysieren und modellieren – Videos und Messdaten multimedial aufbereitet. In: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule 52, Nr. 2, 2003, S. 23 – 30.

Anhang

1. Datenblatt zu den durchgeführten Versuchen:

Eindimensionale Bewegungen:

- Schwere Kugel:
  - Masse Kugel: $m_{Kugel} = 31{,}21g$,
  - Durchmesser Kugel: $d_{Kugel} = 2{,}1cm$
  - Bildrate: $B = 240\frac{1}{s}$
- Papierhütchen:
  - Masse der drei Hütchen: $m_1 = 0{,}35g$, $m_2 = 1{,}35g$, $m_3 = 2{,}35g$
  - Durchmesser: $d_{Hütchen} = 5{,}35cm$
  - Bildrate: $B = 120\frac{1}{s}$
- Auto mit gleichbleibender Zugmasse:
  - Masse Auto: $m_{Auto} = 57{,}22g$,
  - Zugmassen: $m_{Zug_1} = 5{,}8g$, $m_{Zug_2} = 10{,}7g$, $m_{Zug_3} = 15{,}8g$
  - Bildrate: $B = 120\frac{1}{s}$
- Auto mit sich ändernder Zugmasse:
  - Masse der Kette: $m_{Kette} = 13{,}37g$,
  - Länge der Kette: $l_{Kette} = 1m$
  - Bildrate: $B = 120\frac{1}{s}$
- Wasserauto:
  - Masse Auto: $m_{Auto} = 40g$
  - Masse Flasche mit Ball: $m_{Flasche} = 50{,}18g$
  - Höhe des Ausflussrohrs: $h = 5cm$
  - Bildrate: $B = 120\frac{1}{s}$

Zweidimensionale Bewegungen:

- Katapult:
  - Masse Kugel: $m_{Kugel} = 31{,}21g$,
  - Durchmesser Kugel: $d_{Kugel} = 2{,}1cm$
  - $B = 240\frac{1}{s}$
- Da Cau:
  - Masse Spielgerät: $m_{Da\ Cau} = 14{,}9g$
  - Durchmesser Spielgerät: $d_{Da\ Cau} = 3{,}3cm$

- $B = 240\frac{1}{s}$
- Höhe des Maßstabs: $h = 1{,}55m$

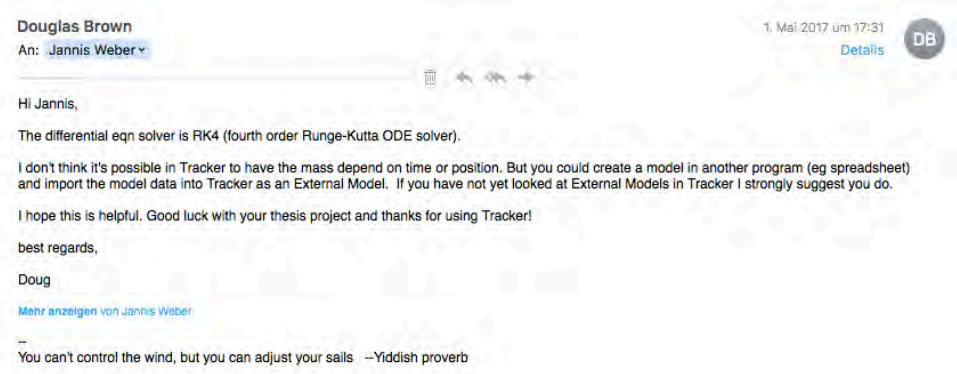
Schwingungen:

- Federpendel:
  - Masse Pendelgewicht: $m_{Pendel} = 65{,}58g$
  - Bildrate: $B = 120\frac{1}{s}$
- U-Rohr:
  - Masse Wasser: $m_{Wasser} = 240g$
  - Bildrate: $B = 120\frac{1}{s}$
- Fadenpendel:
  - Masse Pendelgewicht: $m_{Pendel} = 618{,}4g$,
  - Fadenlänge: $l_{Faden} = 1{,}12m$
  - Bildrate: $B = 120\frac{1}{s}$

Stoßprozesse:

- Freier Fall mit Stoß:
  - Masse Kugel: $m_{Kugel} = 31{,}21g$,
  - Durchmesser Kugel: $d_{Kugel} = 2{,}1cm$
  - $B = 240\frac{1}{s}$
- Wurfparabel mit Stoß:
  - Masse Volleyball: $m_{Volleyball} = 270g$,
  - Durchmesser Volleyball: $d_{Volleyball} = 21cm$
  - Bildrate: $B = 120\frac{1}{s}$
  - Höhe des Maßstabs: $h = 1{,}55m$

2. Email von Douglas Brown, Programmierer von *Tracker*



Douglas Brown
An: Jannis Weber
1. Mai 2017 um 17:31
Details
DB

Hi Jannis,

The differential eqn solver is RK4 (fourth order Runge-Kutta ODE solver).

I don't think it's possible in Tracker to have the mass depend on time or position. But you could create a model in another program (eg spreadsheet) and import the model data into Tracker as an External Model. If you have not yet looked at External Models in Tracker I strongly suggest you do.

I hope this is helpful. Good luck with your thesis project and thanks for using Tracker!

best regards,

Doug

Mehr anzeigen von Jannis Weber

--
You can't control the wind, but you can adjust your sails --Yiddish proverb

3. DVD mit allen Videos und Dateien der jeweiligen Programme

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen, als die angegebenen Hilfsmittel verwandt und die Stellen, die anderen benutzten Druck- und digitalisierten Werken im Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, mit Quellenangaben kenntlich gemacht habe.

(In die Versicherung sind gegebenenfalls auch Zeichnungen, Skizzen sowie bildliche und sonstige Darstellungen sowie Ton- und Datenträger einzuschließen.)

Frankfurt, 29.05.2017

(Jannis Valentin Weber)